



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

проф. д-р ИВАН. АНТОНОВ

<http://mfantonov.com>

ЛИТЕРАТУРА:



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ИВАН. С. АНТОНОВ

**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА
НА ФЛУИДИТЕ**

*ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО
И ДОПЪЛНЕНО ИЗДАНИЕ*

СОФИЯ
2016

20) УРАВНЕНИЯ В КРАЙНИ РАЗЛИКИ ПРИ ЧИСЛЕНО ИЗСЛЕДВАНЕ НА ДВУФАЗНИ НЕИЗОТЕРМИЧНИ ТУРБУЛЕНТНИ СТРУИ

Уравнения в крайни разлики при числено изследване на двуфазни неизотермични турбулентни струи.

Системата частни диференциални уравнения описващи двуфазна неизотермична турбулентна ососиметрична струя могат да се представят с характеристичното уравнение:

$$7.10. \quad A \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} + B \frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} = C \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial y^2} + D,$$

където: $\bar{Z}$ е зависима променлива, A, B, C - коефициенти. D - източников член. Тези коефициенти са дадени в табл. 7.2., съгласно [3,4]

Диференциалите оператори в урavn. 7.10. се заменят с диференчни схеми както следва:

$$7.11 \quad \frac{\partial \bar{Z}}{\partial x} = \frac{\bar{Z}_{i,j} - \bar{Z}_{i-2,j} + \bar{Z}_{i,j-1} - \bar{Z}_{i-2,j-1}}{4K} + O[(K^2)]$$

$$7.12. \frac{\partial \bar{Z}}{\partial y} = \frac{\bar{Z}_{i-1,j+1} - \frac{1}{2}(\bar{Z}_{i,j} + \bar{Z}_{i-2,j})}{H} + O[H^2]$$

$$7.13. \frac{\partial^2 \bar{Z}}{\partial y^2} = \frac{1}{H^2} \left[\bar{Z}_{i-1,j+1} - \frac{1}{2}(\bar{Z}_{i,j} + \bar{Z}_{i-2,j}) - \frac{1}{2}(\bar{Z}_{i,j} + \bar{Z}_{i-2,j} - \bar{Z}_{i-1,j-1}) \right] +$$

$$+ \left(\frac{K}{H} \right)^2 + \frac{1}{12} K^2 \frac{\partial^4 \bar{U}}{\partial y^4},$$

където K е стъпката по x , H е стъпката по y . Грешката от апроксимация съгласно [6] се определя чрез резултатите на независимите променливи в Тейлоров вид в околността (iK_{ij}, H) параметрите на течението дадени в табл. 7.2, се решават с една и съща схема в крайни разлики.

Табл. 7.2.

A	B	C	D
$\overline{y} \cdot \overline{U}_p$	$\overline{y} \cdot \overline{V}_p - \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{y} \cdot \frac{\overline{v}_{tp}}{Sc_t} \right)$	$\overline{y} \cdot \frac{\overline{v}_{tp}}{Sc_t}$	$-\overline{\rho}_p \frac{\partial}{\partial y} (\overline{y} \overline{V}_p) - \overline{y} \overline{\rho}_p \frac{\partial \overline{U}_p}{\partial x}$
$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{U}_g$	$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{V}_g - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{v}_{tg})$	$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{v}_{tg}$	$-\overline{y} \overline{F}_x$
$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{U}_p$	$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{V}_p - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{v}_{tp}) -$ $-\overline{y} \cdot \frac{\overline{v}_{tp}}{Sc_t} \cdot \frac{\partial \overline{\rho}_p}{\partial y}$	$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{v}_{tp}$	$\overline{y} \overline{F}_x$
$\frac{\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{U}_g \cdot \overline{C}_{pg}}{R}$	$\frac{\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{U}_g \cdot \overline{C}_{pg}}{R} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \frac{\overline{C}_{pg} \cdot \overline{v}_{tg}}{R \cdot Pr_t} \right]$	$\frac{\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{v}_{tg} \cdot \overline{C}_{pg}}{R Pr_t}$	$-\overline{y} \cdot \overline{Q} + \overline{F}_x \cdot \overline{y} \cdot (\overline{U}_g - \overline{U}_p) +$ $+ \overline{F}_y \cdot \overline{y} \cdot (\overline{V}_g - \overline{V}_p)$

A	B	C	D
$\frac{\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{U}_p \cdot \overline{C}_{pp}}{R}$	$\frac{\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{U}_p \cdot \overline{C}_{pp}}{R} - \frac{\partial}{\partial \overline{y}} \left[\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \frac{\overline{C}_{pp} \cdot \overline{v}_{tp}}{R \cdot \text{Pr}_t} \right] -$ $-\overline{y} \cdot \frac{\overline{C}_{pp} \cdot \overline{v}_{tp}}{R \cdot \text{Sc}_t} \frac{\partial \overline{\rho}_p}{\partial \overline{y}}$	$\frac{\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{v}_{tp} \cdot \overline{C}_{pp}}{R \text{Pr}_t}$	$\overline{y} \cdot \overline{Q}$
$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{U}_g$	$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{V}_g - \frac{\partial}{\partial \overline{y}} \left(\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \frac{\overline{v}_{tg}}{\sigma_k} \right)$	$\frac{\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{v}_{tg}}{\sigma_k}$	$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{v}_{tg} \cdot \left(\frac{\partial \overline{U}_g}{\partial \overline{y}} \right)^2 - \overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot (\overline{\varepsilon} + \overline{\varepsilon}_p)$
$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{U}_p$	$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{V}_p - \frac{\partial}{\partial \overline{y}} \left(\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \frac{\overline{v}_{tp}}{\sigma_k} \right)$	$\frac{\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{v}_{tp}}{\sigma_k}$	$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_p \cdot \overline{v}_{tp} \cdot \left(\frac{\partial \overline{U}_p}{\partial \overline{y}} \right)^2 - \overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{\varepsilon}_p^*$
$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{U}_g$	$\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{V}_g - \frac{\partial}{\partial \overline{y}} \left(\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \frac{\overline{v}_{tg}}{\sigma_\varepsilon} \right)$	$\frac{\overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{v}_{tg}}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{C_{\varepsilon 1} \cdot \overline{y} \cdot \overline{\rho}_g \cdot \overline{\varepsilon}}{K_g} \left[\overline{v}_{tg} \cdot \left(\frac{\partial \overline{U}_g}{\partial \overline{y}} \right)^2 + G \right] -$ $-\overline{\rho}_g \cdot \overline{y} \cdot \overline{\Phi}_p - \frac{\overline{\rho}_g \cdot \overline{y} \cdot \overline{\varepsilon}^2 \cdot (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 3})}{K_g}$

Табл. 7.2.

При използване на схема в крайни разлики от вида Дюфорт-Франкел съответните величини в слой (i) се определя с известните вече стойности в два преходни слоя $(i-1, i-2)$. Това означава, че е необходимо за започване на пресмятането да се познават (или зададат по подходящ начин) стойностите за два последователни слоя в началото на течението.

След обработка и с прилагане на спомената схема в крайни разлики уравн. 7.10 се представя във вида:

$$\begin{aligned}
 7.14. \quad & A_{i-1,j} \left(\frac{\overline{Z_{i,j}} - \overline{Z_{i-2,j}}}{2K} \right) + B_{i-1,j} \left(\frac{\overline{Z_{i-1,j+1}} - \overline{Z_{i-1,j-1}}}{2H} \right) = \\
 & = \frac{C_{i-1,j}}{H} \left[\overline{Z_{i-1,j+1}} - \frac{1}{2}(\overline{Z_{i,j}} + \overline{Z_{i-2,j}}) - \frac{1}{2}(\overline{Z_{i,j}} - \overline{Z_{i-2,j}}) + \overline{Z_{i-1,j-1}} \right]
 \end{aligned}$$

Прави се следното полагане:

$$\begin{aligned}
 7.15. \quad & E_1 = \frac{A_{i-1,j}}{2K} + \frac{C_{i-1,j}}{H^2}; E_2 = \frac{A_{i-1,j}}{2K} - \frac{C_{i-1,j}}{H^2}; \\
 & E_3 = \frac{C_{i-1,j}}{H^2} - \frac{B_{i-1,j}}{2H}; E_4 = \frac{C_{i-1,j}}{H^2} + \frac{B_{i-1,j}}{2H}; E_5 = D_{i-1,j},
 \end{aligned}$$

при което за уравн. 7.10 решено относно търсената неизвестна $\overline{Z_{i,j}}$ приема вида:

$$7.16. \overline{Z_{i,j}} = \frac{E_2}{E_1} \overline{Z_{i-2,j}} + \frac{E_3}{E_1} \overline{Z_{i-1,j+1}} + \frac{E_4}{E_1} \overline{Z_{i-1,j-1}} + \frac{E_5}{E_1}$$

Очевидно е, че определянето на $\overline{Z_{i,j}}$ се явява функция на параметри, вече известни от предходните сечения $(i-1)$ и $(i-2)$.

Радиалните скоростни компоненти за двете фази $\overline{V_{gi,j}}$ и $\overline{V_{pi,j}}$ се определят с отделни схеми в крайни разлики. Това отговаря на концепцията на авторите, че не бива да се решават с една схема уравнения от дивергентен и градиентен тип. Необходимо е да се отбележи, че тези две компоненти определят напречния макропренос на маса и приноси, което е от съществена важност за точността на решението. Видът на уравненията относно $\overline{V_{gi,j}}$ и $\overline{V_{pi,j}}$ е следният:

$$7.17. \overline{V_{gi,j}} = \frac{\overline{y_{i,j-2}}}{\overline{y_{i,j}}} \frac{\overline{\rho_{gi,j-2}}}{\overline{\rho_{gi,j}}} \overline{V_{gi,j-2}} - \frac{H(\overline{y_{i,j}} - \overline{y_{i,j-1}})}{4K \overline{y_{i,j}} \overline{\rho_{gi,j}}} \times$$

$$\times (\overline{\rho_{gi,j}} \overline{U_{gi,j}} - \overline{\rho_{gi-2,j}} \overline{U_{gi-2,j}} - \overline{\rho_{gi,j-1}} \overline{U_{gi,j-1}} + \overline{\rho_{gi-2,j-1}} \overline{U_{gi-2,j-1}})$$

$$7.18. \quad \overline{V_{pi,j}} = \frac{\overline{y_{i,j-2}}}{\overline{y_{i,j}}} \frac{\overline{\rho_{pi,j-2}}}{\overline{\rho_{pi,j}}} \overline{V_{pi,j-2}} - \frac{H(\overline{y_{i,j}} - \overline{y_{i,j-1}})}{4K \overline{y_{i,j}} \overline{\rho_{pi,j}}} \times \\ \times \left(\overline{\rho_{pi,j}} \overline{U_{pi,j}} - \overline{\rho_{pi-2,j}} \overline{U_{pi-2,j}} - \overline{\rho_{pi,j-1}} \overline{U_{pi,j-1}} + \overline{\rho_{pi-2,j-1}} \overline{U_{pi-2,j-1}} \right)$$

Стойностите на безразмерната плътност на газовата фаза $\overline{\rho_g}$ се пресмята по уравнението на Клайпейрон, което в крайни разлики има вида:

$$7.19. \quad \overline{\rho_{gi,j}} = \frac{P}{\overline{\rho_{g0}} \overline{U_{g0}^2 T_{gi,j}}}$$

Устойчивостта на схемата в крайни разлики се проверява по условията на Нойман

При плоска (равнинна) неизотермична двуфазна турбулентна струя се използва същият подход с прилагане на характеристично уравнение 7.6. Стойностите на зависимостите променливи Φ и коефициента са дадени в табл. 7.3.

Табл. 7.3.

A	B	C	D
$\bar{U}_p$	$\bar{V}_p - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\bar{v}_{tp}}{Sc_t} \right)$	$\frac{\bar{v}_{tp}}{Sc_t}$	$-\bar{\rho}_p \frac{\partial}{\partial y} (\bar{V}_p) - \bar{\rho}_p \frac{\partial \bar{U}_p}{\partial x}$
$\bar{\rho}_g \cdot \bar{U}_g$	$\bar{\rho}_g \cdot \bar{V}_g - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}_g \cdot \bar{v}_{tg})$	$\bar{\rho}_g \cdot \bar{v}_{tg}$	$-\bar{F}_x$
$\bar{\rho}_p \cdot \bar{U}_p$	$\bar{\rho}_p \cdot \bar{V}_p - \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}_p \cdot \bar{v}_{tp}) - \frac{\bar{v}_{tp}}{Sc_t} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial y}$	$\bar{\rho}_p \cdot \bar{v}_{tp}$	$\bar{F}_x$
$\frac{\bar{\rho}_g \cdot \bar{U}_g \cdot \bar{C}_{pg}}{R}$	$\frac{\bar{\rho}_g \cdot \bar{U}_g \cdot \bar{C}_{pg}}{R} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\bar{\rho}_g \cdot \frac{\bar{C}_{pg} \cdot \bar{v}_{tg}}{R \cdot Pr_t} \right]$	$\frac{\bar{\rho}_g \cdot \bar{v}_{tg} \cdot \bar{C}_{pg}}{R Pr_t}$	$-\bar{Q} + \bar{F}_x (\bar{U}_g - \bar{U}_p) + \bar{F}_y (\bar{V}_g - \bar{V}_p)$

Табл. 7.3.

A	B	C	D
$\frac{\bar{\rho}_p \cdot \bar{U}_p \cdot \bar{C}_{pp}}{R}$	$\frac{\bar{\rho}_p \cdot \bar{U}_p \cdot \bar{C}_{pp}}{R} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\bar{\rho}_p \cdot \bar{C}_{pp} \cdot \bar{v}_{tp}}{R \cdot \text{Pr}_t} \right] -$ $-\frac{\bar{C}_{pp} \cdot \bar{v}_{tp}}{R \cdot \text{Sc}_t} \frac{\partial \bar{\rho}_p}{\partial y}$	$\frac{\overline{\rho_p v_{tp} c_{pp}}}{R \text{Pr}_t}$	$\bar{Q}$
$\bar{\rho}_g \cdot \bar{U}_g$	$\bar{\rho}_g \cdot \bar{V}_g - \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\rho}_g \cdot \frac{\bar{v}_{tg}}{\sigma_k} \right)$	$\frac{\overline{\rho_g v_{tg}}}{\sigma_k}$	$\bar{\rho}_g \cdot \bar{v}_{tg} \cdot \left(\frac{\partial \bar{U}_g}{\partial y} \right)^2 - \bar{\rho}_g \cdot (\bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_p)$
$\bar{\rho}_p \cdot \bar{U}_p$	$\bar{\rho}_p \cdot \bar{V}_p - \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\rho}_p \cdot \frac{\bar{v}_{tp}}{\sigma_k} \right)$	$\frac{\overline{\rho_p v_{tp}}}{\sigma_k}$	$\bar{\rho}_p \cdot \bar{v}_{tp} \cdot \left(\frac{\partial \bar{U}_p}{\partial y} \right)^2 - \bar{\rho}_g \cdot \bar{\varepsilon}_p^*$
$\bar{\rho}_g \cdot \bar{U}_g$	$\bar{\rho}_g \cdot \bar{V}_g - \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\rho}_g \cdot \frac{\bar{v}_{tg}}{\sigma_\varepsilon} \right)$	$\frac{\overline{\rho_g v_{tg}}}{\sigma_\varepsilon}$	$\frac{C_{\varepsilon 1} \bar{\rho}_g \cdot \bar{\varepsilon}}{\bar{K}_g} \left[\bar{v}_{tg} \cdot \left(\frac{\partial \bar{U}_g}{\partial y} \right)^2 + G \right] -$ $-\bar{\rho}_g \cdot \bar{\Phi}_p - \frac{\bar{\rho}_g \cdot \bar{\varepsilon}^2 \cdot (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 3})}{\bar{K}_g}$