



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

проф. д-р ИВАН. АНТОНОВ

<http://mfantonov.com>

ЛИТЕРАТУРА:



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ИВАН. С. АНТОНОВ

**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА
НА ФЛУИДИТЕ**

*ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО
И ДОПЪЛНЕНО ИЗДАНИЕ*

СОФИЯ
2016

16) СЪВРЕМЕННИ МЕТОДИ ЗА МОДЕЛИРАНЕ НА ТУРБУЛЕНТНИ НАПРЕЖЕНИЯ. ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ ЗА ИЗСЛЕДВАНЕ. МОДЕЛИ НА ОСНОВАТА НА ОСРЕДНЕНИТЕ СКОРОСТИ

Съвременни методи за моделиране на турбулентни напрежения. Числени методи за изследване. Модели на основата на осреднените скорости

В уравненията, описващи турбулентните течения, освен осреднените по време параметри (скорости, налягане, температура, концентрация) фигурират и рейнолдсовите (нормални и тангенциални) напрежения. Наличието на тези допълнителни неизвестни води до съответна степен на неопределеност в уравненията за движение. Основният въпрос при решаване на турбулентните течения се свежда до моделирането по подходящ начин на неизвестните рейнолдсови напрежения. Най-често използваните модели се свеждат до следните:

а) Нулев на базата на полето на осреднените скорости. Към тази група се отнасят и първи ред, при които се определя турбулентният вискозитет. Това се реализира чрез хипотезата за пътя на размесване (по Прандтл) или с моделните уравнения за турбулентната (пулсационната) енергия и дисипацията ϵ .

б) Моделиране на рейнолдсовите напрежения. Записват се преносни уравнения относно онези от тях, които по преценка на изследователя са определящи за развитие на течението. Те са известни като модели от втори ред.

Извън тези две основни групи модели напоследък намират приложение и редица други – директно моделиране на уравненията за движение, “замразената турбулентност” и др.

Модели на основата на осреднените скорости.

Модели от нулев порядък. Най-простите модели за определяне на турбулентните тангенциални напрежения - $\tau_T = -\overline{\rho u'v'}$ използват т. нар "път на размесване" l_m . Към тях се отнася известният от основния курс по механика на флуидите [19, 23] модел на турбулентност на Прандтл:

$$6.1. \tau_T = -\overline{\rho u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y},$$

където l_m е път на размесване, изразен чрез дебелината на граничния слой

$$6.2. l_m = \text{const} \cdot b(x)$$

В горния израз за пристенна турбулентност е равна на 0,4, а за свободна - 0,27.

Зависимостта (6.1) може да се запише аналогично на тангенциалните вискозни напрежения:

$$6.3. \tau_T = \rho \nu_T \frac{\partial u}{\partial y} = \mu_T \frac{\partial u}{\partial y},$$

с което се въвеждат упоменатите в предишните раздели кинематичен и динамичен турбулентен вискозитет.

Някои често прилагани зависимости от нулев порядък за определяне на турбулентните тангенциални напрежения са дадени в табл.6.1.

Таблица 6.1.

ν_T	автор	особености на модела
$k_1 b(u_{\max} - u_{\min})$	Прандтл	
$k_1^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^4 / \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$	Карман	
$l_m'^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$	Тейлор	$l_m'^2 = 2l_m$
$k_1 b(u_m - u_2) \frac{\partial u}{\partial y}$	Прандтл	

Модели от първи порядък. Моделите от първи порядък използват уравнения за турбулентния пренос, основаващи се на полето на осреднените по време скорости.

Модел с едно уравнение относно турбулентната кинетична енергия. Предложеният от Прандтл и Колмогоров модел използва като проста характеристика на турбулентността преноса на турбулентната кинетична енергия k :

$$6.4. \quad k = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2},$$

като k се представя чрез едно уравнение, аналогично на уравненията за движение. То се получава след умножение на всяко едно от уравненията на Навие - Стокс по съответната пулсационна скоростна компонента, осредняване по време и сумиране на трите уравнения при съблюдаване на съответните апроксимации по теорията на граничния слой.

Уравнението за преноса на турбулентната пулсационна енергия k има вида

$$6.5. \quad \frac{\partial k}{\partial t} + U_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[U_i' \left(\frac{U_j' U_j'}{2} + \frac{p'}{\rho} \right) - \nu \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]}_D - \underbrace{\overline{U_i' U_j'} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_P - \underbrace{\beta g_i \overline{U_i' C'}}_G - \underbrace{\nu \frac{\partial U_i'}{\partial x_j} \frac{\partial U_i'}{\partial x_j}}_E$$

Четири члена в дясната страна на урavn.6.5 съгласно направените под тях означения изразяват: D - дифузионния пренос, обусловен от пулсациите на скоростта и налягането, P - генерация на енергия, дължаща се на взаимодействието на рейнолдсовите напрежения и градиента на усреднените скорости (генерация от рейнолдсови напрежения), G - генерация от действие на обемни сили, описва прехода на турбулентна кинетична енергия в потенциална и обратно, E - вискозна дисипация.

Турбулентният кинематичен вискозитет се пресмята чрез израза

$$6.6. \quad \nu_T = \rho k^{\frac{1}{2}} l_m,$$

при което l_m се определя съгласно (6.2).

Моделът има слаба приложимост, особено при струйни течения. Най-често се използва съвместно с уравнението за скоростта на дисипация на турбулентната пулсационна енергия ε .

Модели с две уравнения. При моделите от този тип се използват две преносни уравнения - за турбулентната пулсационна енергия k и за дисипацията ε .

Уравнението за дисипацията на турбулентната енергия ε [56] има вида

$$1.7. \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{v U'_k \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)^2} + 2 \frac{\nu}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \right]}_D - \underbrace{2 \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_i}{\partial x_l}}_{\Omega} - \underbrace{2 \nu^2 \left(\frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_i} \right)^2}_E$$

В дясната част на уравн.6.7 фигурират три групи членове, отразяващи: D - дифузионния пренос, обусловен от пулсациите на скоростта и налягането, Ω - генерация, дължаща се на "разтягането" на вихровите тръбички, E - вискозна дисипация.

Уравн.(6.5 и 6.7) за установено двумерно течение имат вида:

$$6.8. \quad u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^j \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - \overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y} - \varepsilon$$

$$6.9. \quad \rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = \frac{1}{y^j} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \rho \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + C_{\varepsilon 1} \rho \frac{\varepsilon}{k} \nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k}$$

Константите в уравн.6.8-6.9 са дадени в табл.6.2.

Таблица 6.2.

означение на константата	C_μ	σ_k	σ_ε	$C_{1\varepsilon}$	$C_{2\varepsilon}$	$C_{3\varepsilon}$	σ_T	R
Стойност	0,09	1	1,3	1,43	1,92	1,43	0,9	0,588
Литературен източник		[51]	[51]		[41]		[50]	

В литературата [29] моделите от този тип в зависимост от стойностите на константите се делят на:

а) $k\varepsilon_1$ - модел, при който $C_{2\varepsilon} = 1.92 - 0.0667F$, където

$$F = \left| \frac{b}{2\Delta U} \left(\frac{dU_c}{dx} - \left| \frac{dU_c}{dx} \right| \right) \right|, \quad U_c - \text{осреднена скорост.}$$

б) $k\varepsilon_2$ - модел константите се определят, както следва:

$$C_{\varepsilon 1} = 1.40, C_{2\varepsilon} = 1.9, \sigma_\varepsilon = 1.00, C_\mu = 0.09 \left(\frac{\bar{P}}{\varepsilon} \right),$$

където $\frac{\bar{P}}{\varepsilon} = \frac{\int_0^b \tau_r \left(\frac{P}{\varepsilon} \right) y^j dy}{\int_0^b \tau_r y^j dy}$, $\frac{P}{\varepsilon} = f(k)$ и се определя по литературни данни съгласно [29]. Този модел се препоръчва

при течения с малък напречен градиент на скоростта.

Турбулентният кинематичен вискозитет ν_T се определя чрез k и ε :

$$6.10 \quad \nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$6.10a \quad \nu_T = (0.09 - 0.04F) \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$6.10b \quad -\overline{u'v'} = \nu_T \frac{\partial u}{\partial y},$$

а напречният пренос на скаларна променлива – чрез израза

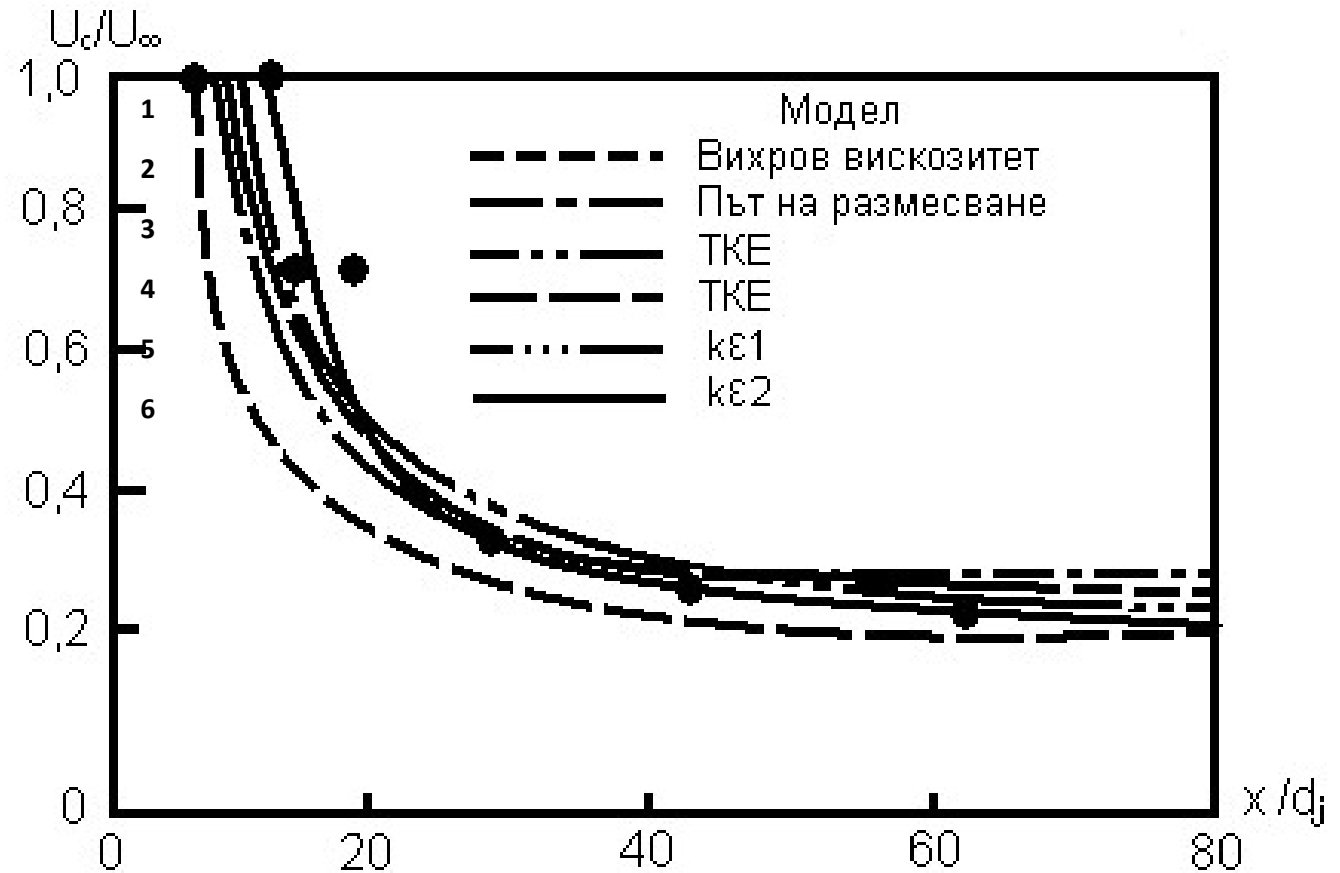
$$6.10b \quad -\rho \overline{v's'} = \frac{\rho l_u^2}{Sc_t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left| \frac{\partial s}{\partial y} \right| = \frac{\nu_t}{Sc_t} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)$$

Представеният модел на турбулентност е известен като $k - \varepsilon$ модел и намира широко приложение при моделиране на турбулентни течения.

На фиг.6.1 е приведено даденото в [29] сравнение на резултати от числено изследване на ососиметрична струя при прилагане на модели, използващи полето на осреднените скорости – кривите 1 и 2 (модели от нулев порядък - на вихров вискозитет, респ. чрез пътя на размесване), 3 и 4 - с уравнението за турбулентната енергия, 5 - $k - \varepsilon$, 6 - $k\varepsilon_2$ - модели. Направено е сравнение с опитни резултати по *Forestall, W.Jr., A.H.Shapiro, Momentum and mass transfer in coaxial gas jets, J.Appl.Mech., 1950, v.72, p.p.339 – 408.* (цит.по [29]).

Модели от първи порядък с повече уравнения. При моделиране на неизотермични течения или течения, съдържащи примеси, се налага използване на "хибридни" модели на турбулентност с повече от две уравнения.

В тези случаи се налага определяне на корелации, които съдържат пулсационната съставляща на температурата или концентрацията $(T' \text{ и } c') - \overline{T'^2}, \overline{u'T'}, \overline{v'T'}, \overline{c'^2}, \overline{u'c'}, \overline{v'c'}$ и др. За тази цел се въвеждат две допълнителни уравнения относно турбулентния пренос на топлина и концентрация:



фиг.6.1

$$6.11. \rho \left(u \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x} + v \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial y} \right) = \frac{1}{y^j} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \left(y^j \rho \frac{\nu_t}{\sigma_T} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial y} \right) + \rho \left(-2 \overline{v'T'} \frac{\partial T}{\partial y} - R^{-1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{T'^2} \right)$$

$$6.12. u \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial x} + v \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial y} = \left(\frac{1}{y^j} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[y^j \frac{\nu_t}{\sigma_c} \frac{\partial \overline{c'^2}}{\partial y} \right] - 2 \overline{v'c'} \frac{\partial c}{\partial y} - \overline{c'} \frac{\varepsilon}{Rk}$$

Получава се един модел от четири уравнения, чрез които се определят съставящите на тензора на турбулентните напрежения. За описание на турбулентния топло- и масопренос е необходимо да се определят и останалите корелации на температурата и концентрацията със скоростните компоненти. В двумерен вид определянето им се реализира, както следва: корелациите с пулсационната съставляща на надлъжната скоростна компонента се пресмятат чрез $\overline{T'^2}$, респ. $\overline{c'^2}$:

$$\overline{u'T'} = C_4 \left(\overline{T'^2} k \right)^{\frac{1}{2}}$$

6.13.

$$\overline{u'c'} = C_4 \left(\overline{c'^2} k \right)^{\frac{1}{2}}$$

Корелациите от вида $\overline{v'T'}$ и $\overline{v'c'}$ се определят чрез кинематичния турбулентен вискозитет и турбулентните числа на Прандтл и Шмидт:

$$\overline{v'T'} = \left(\frac{v_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial y}$$

6.14.

$$\overline{u'c'} = \left(\frac{v_t}{Sc_t} \right) \frac{\partial c}{\partial y}$$

По този начин с помощта на четири моделни уравнения може да се затвори системата уравнения за движение при турбулентни неизотермични течения, респ. течения, носещи примеси, като се отчете и турбулентният топло- и масообмен.

Моделите от нулев и първи порядък се свеждат до определяне на турбулентния вискозитет и пътя на размесване, като се използва полето на осреднените скорости, температура и концентрация.