



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

проф. д-р ИВАН. АНТОНОВ

<http://mfantonov.com>

ЛИТЕРАТУРА:



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

ИВАН. С. АНТОНОВ

**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА
НА ФЛУИДИТЕ**

*ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО
И ДОПЪЛНЕНО ИЗДАНИЕ*

СОФИЯ
2016

13) ДВУФАЗНИ ТУРБУЛЕНТНИ СТРУИ. ОСОБЕНОСТИ НА ИНТЕГРАЛНИТЕ МЕТОДИ, ПРИЛОЖИМИ ПРИ ИЗСЛЕДВАНЕТО ИМ

Двуфазни турбулентни струи. Особености на интегралните методи, приложими при изследването им

Уравненията за движение на двуфазни турбулентни струи се получават на основата на дадените в т. 1.6 векторни уравнения в двуфлуиден вид (1.78 - 1.81). След направените приемания и опростявания, обичайни за струйния граничен слой, при напълно развита турбулентност и пренебрегване на вискозните напрежения се получават уравненията за движение на двуфазна турбулентна завъртяна струя в следния вид:

$$5.52. \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (v_g r)}{\partial r} = 0$$

$$5.53. \frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (v_p r)}{\partial r} = 0$$

$$5.54. \rho_g u_g \frac{\partial u_g}{\partial x} + \rho_g v_g \frac{\partial u_g}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{r \partial r} (r \rho_g \overline{u'_g v'_g}) - F_x$$

$$5.55. \frac{\partial p}{\partial r} = \rho_g \frac{w_g^2}{r} - F_y$$

$$5.56. \rho_g u_g \frac{\partial w_g}{\partial x} + \rho_g w_g \frac{\partial w_g}{\partial r} = -\rho_g \frac{w_g v_g}{r} - \frac{\partial}{\partial r} (\rho_g \overline{w'_g v'_g}) - 2\rho_g \frac{\overline{w'_g v'_g}}{r}$$

$$5.57. \rho_p u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + \rho_p v_p \frac{\partial u_p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial r} (\rho_p \overline{u'_p v'_p}) - \rho_p v_p \frac{\partial u_p}{\partial r} - \rho_p \frac{\overline{u'_p v'_p}}{r} + F_x$$

$$5.58. \rho_p \frac{\partial w_p}{\partial x} + \rho_p v_p \frac{\partial w_p}{\partial r} = -\rho_p \frac{\overline{w'_p v'_p}}{r} - \frac{\partial}{\partial r} (\rho_p \overline{w'_p v'_p}) - 2\rho_p \frac{\overline{w'_p v'_p}}{r} + \overline{v'_p \rho'_p}$$

$$5.59. \rho_g u_p \frac{\partial \chi}{\partial x} + \rho_g v_p \frac{\partial \chi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} (\rho_g \overline{v'_p \rho'_p}) - \frac{\overline{v'_p \rho'_p}}{r}$$

В системата уравн. (5.52 - 5.59) са неизвестни следните величини - трите осреднени по време скоростни компоненти за съответните фази - $u_g, v_g, w_g, u_p, v_p, w_p$, налягането p , масовата концентрация χ и корелациите $\overline{u'_g v'_g}, \overline{w'_g v'_g}, \overline{u'_p v'_p}, \overline{w'_p v'_p}, \overline{v'_p \rho'_p}$.

За затваряне на системата уравнения, както при всички турбулентни течения, се налага въвеждане на съответни адекватни модели на турбулентност. Необходимо е за всеки конкретен случай на решение да се зададат граничните условия на задачата. Моделите на турбулентност, приложими при двуфазни течения, се разглеждат в следващата глава на книгата.

В този раздел се дават изводът и приложението на интегралните условия при двуфазна турбулентна струя за двуфлуиден модел на течението. Разглежда се най-общият случай на двуфазно течение - завъртяна турбулентна струя, изтичаща симетрично на ос x . Граничните условия в основния участък от течението могат да се запишат във вида:

– за оста на течението

$$r = 0 \quad \partial u_p / \partial y = 0, \quad v_p = w_p = 0$$

$$5.60a. \quad (y = 0) \quad \partial u_g / \partial y = 0, \quad v_g = w_g = 0$$

$$\frac{\partial(\overline{u'_p v'_p})}{\partial y} = \frac{\partial(\overline{v'_p w'_p})}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\overline{u'_g v'_g})}{\partial y} = \frac{\partial(\overline{v'_g w'_g})}{\partial y} = 0, \quad \partial \chi / \partial y = 0$$

при завъртени струи: $p = p_{\min}, \quad \partial p / \partial y = 0$

– за струйната граница по примеси:

$$r = r_p \quad u_p = w_p = 0$$

$$(y = y_p) \quad \partial u_p / \partial y = \partial w_p / \partial y = 0, \quad \overline{v'_p w'_p} = \overline{u'_p v'_p} = 0$$

5.616.

$$\frac{\partial(\overline{u'_p v'_p})}{\partial y} = \frac{\partial(\overline{v'_p w'_p})}{\partial y} = \frac{\partial(\overline{\rho'_p v'_p})}{\partial y} = 0$$

$$\overline{\rho'_p v'_p} = 0, \quad \chi = 0, \quad \partial \chi / \partial y = 0$$

– за динамичната струйна граница:

$$r = r_g \quad u_g = u_2 \quad (u_g = 0), \quad w_g = 0$$

$$5.62в. \quad (y = y_g) \quad \partial u_g / \partial y = \partial w_g / \partial y = 0$$

$$\overline{v'_g w'_g} = \overline{u'_g v'_g} = 0, \quad \partial(\overline{u'_g v'_g}) / \partial y = \partial(\overline{v'_g w'_g}) / \partial y = 0$$

$$p = p_{\text{окол.}}$$

При изследване на незавъртени двуфазни струи от граничните условия (5.62) отпадат членовете, съдържащи скоростните компоненти w_g и w_p , както и съответстващите им корелации. Налягането се приема равно на това в околната среда. При изтичане в неподвижна флуидна среда ($u_2 = 0$) се променя само първото условие от 5.62в, докато останалите остават същите. Частният случай на еднофазно (газово) течение се определя от граничните условия (5.62а и 5.62в).

Изводът на интегралните условия при двуфазни турбулентни струи съгласно [6, 43, 44] се прави на основата на системата частни диференциални уравн. (5.52-5.59) при съблюдаване на граничните условия 5.60.

Уравнението за количество на движение за газовата (носеща) фаза се получава, като се използват уравн. 5.52-5.54.

<http://mfantonov.com/>

Първото уравнение се умножава по u_g и се събира с второто, предварително умножено с y^j , от което следва:

$$5.63. \frac{\partial}{\partial x} \left[(\rho_g u_g^2 + p) y^j \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_g (u_g v_g + \overline{u'_g v'_g}) y^j \right] = -F_x y^j$$

При наличие на спътно течение, което се движи със скорост u_2 , уравнението приема вида

$$5.64. \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \rho_g \left[u_g (u_g - u_2) + p \right] y^j \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho_g \left[v_g (u_g - u_2) + \overline{u'_g v'_g} \right] y^j \right\} = -F_x y^j$$

Уравн. 5.63 и 5.64 се интегрират напречно на струйното течение в граници от $y = 0$ до $y = y_g$ (външната струйна граница):

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_g} (\rho_g u_g^2 + p) y^j dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{y_g} \rho_g (u_g v_g + \overline{u'_g v'_g}) y^j dy = - \int_0^{y_g} F_x y^j dy,$$

$$\text{респ. } \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_g} \rho_g \left\{ \left[u_g (u_g - u_2) \right] + p \right\} y^j dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{y_g} \rho_g \left[v_g (u_g - u_2) + \overline{u'_g v'_g} \right] y^j dy = - \int_0^{y_g} F_x y^j dy$$

Вторият интеграл в горните уравнения приема стойност нула в границите на интегриране, при което се получават интегралните условия:

$$5.65. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_g} (\rho_g u_g^2 + p) y^j dy = - \int_0^{y_g} F_x y^j dy$$

при свободна струя и за изтичане в спътна среда

$$5.66. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_g} \left\{ \rho_g \left[u_g (u_g - u_2) \right] + p \right\} y^j dy = - \int_0^{y_g} F_x y^j dy$$

Интегралното условие за количеството на движение може да се изведе и при запазване в изходните уравнения на нормалните турбулентни напрежения $\overline{u_g'^2}$. В този случай уравн. 5.66 приема вида

$$5.67. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_g} \left\{ \rho_g \left[u_g (u_g - u_2) + \overline{u_g'^2} \right] + p \right\} y^j dy = - \int_0^{y_g} F_x y^j dy$$

Уравнения 5.65-5.67 описват интегралното условие за количество на движение на газовата среда. При двуфазните течения горните изрази не дават запазването на количество на движение на средата, както е при еднофазните струи.

Намиращият се в дясната страна интеграл $\int_0^{y_g} F_x y^j dy$, който отчита влиянието на силите F_x и в зависимост от тях се мени по x . Влияние върху количеството на движение оказват и допълнителните нормални напрежения, фигуриращи в уравн. 5.53.

По аналогичен начин могат да се изведат и интегралните условия за количество на движение на примесите. Използват се уравн. 5.53 и 5.55, от които следва

$$5.68. \frac{\partial}{\partial x} (\rho_p u_p^2 y^j) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_p (v_p u_p + \overline{u_p' v_p'}) y^j \right] = F_x y^j$$

Уравн. 5.68 се интегрира по y в границите от 0 до y_p :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_p} (\rho_p u_p^2 y^j) dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{y_p} [\rho_p (v_p u_p + \overline{u'_p v'_p}) y^j] dy = \int_0^{y_p} F_x y^j dy$$

Вторият интеграл на уравнението има стойност нула в границите на интегриране, при което се получава

$$5.69. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_p} \rho_p u_p^2 y^j dy = \int_0^{y_p} F_x y^j dy$$

Ако се отчете влиянието на допълнителните нормални напрежения $\overline{u'^2_p}$, уравн.5.69 приема вида

$$5.70. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_p} \rho_p (u_p^2 + \overline{u'^2_p}) y^j dy = \int_0^{y_g} F_x y dy$$

Получените уравн. 5.69 и 5.70 описват интегралното условие за количество на движение на втората фаза - на примесите.

В редица случаи е възможно формирането на двуфазното течение да стане при изтичане на течна струя в среда от другата фаза. Например при изтичане на течна струя в газова среда на известно разстояние от началото се формира двуфазно течение вследствие увеличаване в движение на газови частици. Същият ефект се наблюдава и при пулверизация на течни или твърди частици от газова или течна струя. В този случай началното количество на движение е общо за двете фази, като впоследствие част от него отива за въвлечане в движение на частици от другата фаза. При подобни течения, които имат общо начално количество на движение, се налага сумирането му за двете фази. От друга страна това сумиране е наложително и от обстоятелството, че независимо от двуфлуидната схема, приета за изследване на течението, е невъзможно отделянето на количеството на движение за двете фази при интегралното им разглеждане. Самото развитие на двуфазното течение е свързано с непрекъснатото преразпределение на количеството на движение между фазите. Тези съображения налагат представянето му като една сума.

Само в някои частни случаи при реализиране на алгоритъма за пресмятане се използва записът на количеството на движение относно една от фазите.

След сумиране на съответните изрази за количеството на движение на двуфазна струя се получава

$$5.71. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_g} [\rho_g u_g (u_g - u_2) + p] y^j dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_p} \rho_p u_p^2 y^j dy = 0,$$

респ. за свободна двуфазна струя ($u_2 = 0$)

$$5.72. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_g} (\rho_g u_g^2 + p) y^j dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_p} \rho_p u_p^2 y^j dy = 0$$

В случая, когато се вземат предвид и стойностите на допълнителните нормални напрежения $\overline{u_g'^2}$ и $\overline{u_p'^2}$, уравн. 5.71 приема вида

$$5.73. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_g} [\rho_g (u_g - u_2) u_g + \rho_g \overline{u_g'^2} + p] y^j dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_p} \rho_p (u_p^2 + \overline{u_p'^2}) y^j dy = 0$$

или за свободна струя при $u_2 = 0$:

$$5.74. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_g} [\rho_g (u_g^2 + \overline{u_g'^2}) + p] y^j dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_p} \rho_p (u_p^2 + \overline{u_p'^2}) y^j dy = 0$$

Интегрирането по x на уравн. 5.71 – 5.74 води до изразите:

5.75.

$$\int_0^{y_g} \left[\rho_g u_g (u_g - u_2) + p \right] y^j dy + \int_0^{y_p} \rho_p u_p^2 y^j dy = const$$

$$\int_0^{y_g} (\rho_g u_g^2 + p) y^j dy + \int_0^{y_p} \rho_p u_p^2 y^j dy = const$$

$$\int_0^{y_g} (\rho_g u_g^2 + \rho_g \overline{u_g'^2} + p) y^j dy + \int_0^{y_p} \rho_p (u_p^2 + \overline{u_p'^2}) y^j dy = const$$

$$\int_0^{y_g} \left[\rho_g (u_g - u_2) u_g + \rho_g \overline{u_g'^2} + p \right] y^j dy + \int_0^{y_p} \rho_p (u_p^2 + \overline{u_p'^2}) y^j dy = const$$

Константата от дясната страна на уравн. 5.75 представлява началното сумарно количество на движение I_0 .

В общия случай сумарното количество на движение има вида:

$$5.76. \quad I_{0\Sigma} = (\rho_g u_{go}^2 + \rho_p u_{po}^2) \pi^j y_o^j$$

$$I_{0\Sigma} = \left[\rho_g (u_{go} - u_2) u_{go} + \rho_p u_{po}^2 \right] \pi^j y_o^j$$

На уравн. 5.75 се прави следната формална преработка: умножават се двете им страни по $(2\pi)^j$, след което се получава:

$$(2\pi)^j \int_0^{y_g} [\rho_g (u_g - u_2) u_g + p] y^j dy + (2\pi)^j \int_0^{y_p} \rho_p u_p^2 y^j dy = I_{0\Sigma}$$

$$(2\pi)^j \int_0^{y_g} (\rho_g u_g^2 + p) y^j dy + (2\pi)^j \int_0^{y_p} \rho_p u_p^2 y^j dy = I_{0\Sigma}$$

$$5.77. (2\pi)^j \int_0^{y_g} [\rho_g (u_g - u_2) u_g + \rho_g \overline{u_g'^2} + p] y^j dy + (2\pi)^j \int_0^{y_p} \rho_p (u_p^2 + \overline{u_p'^2}) y^j dy = I_{0\Sigma}$$

$$(2\pi)^j \int_0^{y_g} [\rho_g (u_g^2 + \overline{u_g'^2}) + p] y^j dy + (2\pi)^j \int_0^{y_p} \rho_p (u_p^2 + \overline{u_p'^2}) y^j dy = I_{0\Sigma}$$

Като частен случай на получените уравнения 5.77 могат да се запишат интегралните условия за количество на движение за свободни струи (без отчитане на $\overline{u_g'^2}$ и $\overline{u_p'^2}$):

– за завъртени турбулентни струи ($j = 1, y = r$)

$$5.78. 2\pi \left[\int_0^{y_g} (\rho_g u_g^2 + p) r dr + \int_0^{y_p} \rho_p u_p^2 r dr \right] = I_{0\Sigma}$$

– за ососиметрични (завъртени) турбулентни струи ($S_0 = 0, w = 0, p = 0, j = 1, y = r$)

$$5.79. 2\pi \left[\int_0^{y_g} \rho_g u_g^2 r dr + \int_0^{y_p} \rho_p u_p^2 r dr \right] = I_{0\Sigma}$$

– за плоски (равнинни) двуфазни струи ($j=0$):

$$5.80. \int_0^{y_g} \rho_g u_g^2 dy + \int_0^{y_p} \rho_p u_p^2 dy = I_{0\Sigma}$$

Началното количество на движение за последните два случая е дадено в табл. 5.3:

Таблица 5.3

Вид на течението	J	$I_{0\Sigma}$
ососиметрични струи	1	$(\rho_g u_{go}^2 + \rho_p u_{po}^2) \pi \cdot r_o^2$
плоски (равнинни) струи	0	$(\rho_g u_{go}^2 + \rho_p u_{po}^2) b_o$

Получените интегрални условия (5.75 - 5.76) отразяват важна характеристика на струйното течение - запазването на началните стойности на количеството на движение (сумарно за двете фази). В случая на двуфазни турбулентни струи това условие се отнася до сумарното на двете фази количество на движение, което е равно на сбора от началните им стойности. При завъртени струи [23] началното количество на движение заедно с момента на количество на движение определят степента на въртене на течението, която е основно число на подобие при тях.

Моментът на количество на движение е определяща интегрална характеристика за завъртените струйни течения. Чрез него се изразява специфична особеност на тези течения – въртенето около оста им.

Определянето на момента на количество на движение се прави на основата на уравн. 5.52 и 5.56, като първото, умножено по $w_g \cdot y^j$, се сумира с второто, предварително умножено с y^j :

$$5.81 \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\rho_g u_g w_g + \rho_g \overline{u'_g w'_g} \right) y^{2j} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\rho_g w_g v_g + \rho_g \overline{w'_g v'_g} \right) y^{2j} + y^j \rho_g w_g v_g + \rho_g \overline{v'_g w'_g} \frac{\partial}{\partial y} (y^{2j}) \right] = 0$$

Уравн. 5.81 се интегрира напречно по y в струйния граничен слой от 0 до ∞ , респ. от 0 до y_g , както следва:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \left[\left(\rho_g u_g w_g + \rho_g \overline{u'_g w'_g} \right) y^{2j} \right] dy + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[\int_0^\infty \left(\rho_g w_g v_g + \rho_g \overline{w'_g v'_g} \right) y^{2j} dy + \int_0^\infty \rho_g w_g v_g y^j dy + \int_0^\infty 2 \rho_g \overline{v'_g w'_g} y^j dy \right] = 0 \end{aligned}$$

Вторият, третият и четвъртият интеграл се анулират за границите на интегриране, при което се получава

$$5.82a. \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty(y_g)} \left(\rho_g u_g w_g + \rho_g \overline{u'_g w'_g} \right) y^{2j} dy = 0,$$

а след интегриране по x следва

$$5.82b. \quad \int_0^\infty \left(\rho_g u_g w_g + \rho_g \overline{u'_g w'_g} \right) y^{2j} dy = const$$

Изразът (5.82) е една важна характеристика на завъртяната турбулентна струя - описва запазването на момента на количество на движение. Това съгласно Л.Г.Лойцянский [23] е второто задължително интегрално условие при завъртените течения, което дава възможност за въвеждане на съответен критерий за подобие при тях.

Тъй като моментът на количество на движение се отнася до едно ососиметрично течение ($j = 1$), може да се премине в цилиндрична координатна система, при което се заменя y с r . След умножение по 2π на двете страни на 5.82 следва

$$5.83. \quad 2\pi \int_0^{\infty} \left(\rho_g u_g w_g + \rho_g \overline{u'_g w'_g} \right) r^2 dr = M_{go},$$

където M_{go} е началният момент на количество на движение на газовата среда:

$$5.84. \quad M_{go} = \pi \rho_g u_{go} w_{go} r_o^3$$

При пренебрегване влиянието на двоичната корелация $\overline{u'_g w'_g}$ като величина от по-нисък порядък в сравнение с $u_g w_g$ ($\overline{u'_g w'_g} \ll u_g w_g$) 5.83 приема вида

$$5.85. \quad 2\pi \int_0^{\infty} \rho_g u_g w_g r^2 dr = M_{go}$$

Моментът на количество на движение съдържа в себе си произведение на скоростни компоненти, характерен размер на течението и плътност. Условно той би могъл да се разгледа като въртене на флуиден обем с маса $2\pi \rho_g u_g r dr$ с тангенциална (завъртаща) скорост w_g на разстояние r от оста на симетрия.

След преработване на уравн. 5.53 и 5.58 се получава моментът на количество на движение за втората (течна или твърда) фаза [6, 44]

$$5.86a. \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho_p \left(u_p w_p + \overline{u'_p w'_p} \right) r^2 dr = 0$$

Без отчитане на турбулентните тангенциални напрежения $\overline{u'_p w'_p}$ изразът добива вида

$$5.86б. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho_p u_p w_p r^2 dr = 0$$

След интегриране по x се получава условието за запазване на момента на количество на движение на примесите:

$$5.86в. 2\pi \int_0^{\infty} \rho_p u_p w_p r^2 dr = M_{po}$$

$$5.86г. 2\pi \int_0^{\infty} \rho_p \left(u_p w_p + \overline{u'_p w'_p} \right) r^2 dr = M_{po}$$

Началният момент на количество на движение за фазата на примесите се определя с

$$5.87. M_{po} = \pi \rho_p u_{po} w_{po} r_o^3$$

По аналогични на упоменатите при разглеждане на количеството на движение причини моментът може да се обедини в един израз за двете фази. За общия момент на количество на движение се получават уравненията:

$$5.88а. 2\pi \left[\int_0^{\infty} \rho_g u_g w_g r^2 dr + \int_0^{\infty} \rho_p u_p w_p r^2 dr \right] = M_{0\Sigma}$$

$$5.88б. 2\pi \left[\int_0^{\infty} \rho_g \left(u_g w_g + \overline{u'_g w'_g} \right) r^2 dr + \int_0^{\infty} \rho_p \left(u_p w_p + \overline{u'_p w'_p} \right) r^2 dr \right] = M_{0\Sigma}$$

Общият начален момент на количество на движение $M_{0\Sigma}$ се определя като сбор от началните моменти за двете фази:

$$5.89. M_{0\Sigma} = \pi \cdot r_o^2 \left(\rho_g u_{go} w_{go} + \rho_p u_{po} w_{po} \right)$$

Възможни са и частни случаи, напр. при изтичането на завъртяна струя или когато съществува само една от фазите. Тогава началният момент на количество на движение се приравнява към този на съответната фаза:

$$5.90. M_{0\Sigma} = M_{po} \quad \text{или} \quad M_{0\Sigma} = M_{go}$$

Условието за запазване на съдържанието на примеси в двуфазното течение се получава при съответна съвместна преработка на уравненията за непрекъснатост за примесите и за концентрацията им. Уравненията се умножават съответно по χ и y^j и след сумирането им се получава

$$5.91. \frac{\partial}{\partial x} (u_p \chi \cdot y^j) + \frac{\partial}{\partial y} (v_p \chi \cdot y^j) = \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho_g y^j \frac{v_{tp}}{Sc} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)$$

Уравнение 5.91 се интегрира напречно по ос y в граници от 0 до y_p , респ. от 0 до ∞ :

$$5.92. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty (u_p \chi \cdot y^j) dy + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty (v_p \chi \cdot y^j) dy = \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty \left(\rho_g y^j \frac{v_{tp}}{Sc} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) dy$$

Тъй като за границите на интегриране се анулират вторият и третият интеграл, от 5.92 следва

$$5.93. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho_g u_p \chi \cdot y^j dy = 0$$

След интегриране по x се получава условието за запазване на съдържанието на примеси в струята:

$$5.94. \int_0^{\infty} \rho_g u_p \chi \cdot y^j dy = \text{const},$$

Уравнението, умножено по $2\pi^j$, дава израза

$$5.95. (2\pi)^j \int_0^{\infty} \rho_g u_p \chi \cdot y^j dy = G_o,$$

където $G_o = \pi^j \rho_p u_o y_o^{j+1}$ е началното съдържание на примеси.

Уравнение 5.95, приложено за ососиметрични струи ($j=1, y=r$), има вида

$$5.96. (2\pi) \int_0^{\infty} \rho_g u_p \chi \cdot r dr = \pi \rho_p u_{po} r_o^2$$

и съответно за плоски (равнинни) струи ($j=0$)

$$5.97. \int_0^{\infty} \rho_g u_p r dy = \rho_p u_{po} b_o$$

Получените уравнения изразяват условието за запазване на съдържанието на примеси в струйно двуфазно течение, съответно в диференциален и интегрален вид. Това условие подчертава двуфазния характер на струята. При изследване с помощта на т.нар. едноскоростен модел условието за запазване съдържанието на примеси е едно от основните уравнения в решението.

Уравнението за кинетичната енергия на газовата (носещата) фаза се получава след преработка на урavn. 5.52 и 5.54. Уравненията се умножават съответно по $\rho_g(u_g^2 - u_2^2)$ и $2(u_g - u_2)y^j$ и след почленно сумиране се получава

$$5.98. \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_g y^j u_g (u_g - u_2)^2 \right] + 2(u_g - u_2) \frac{\partial}{\partial x} (p y^j) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_g v_g (u_g^2 - u_2^2) y^j \right] =$$

$$2 \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(v_{lg} y^j \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) - \rho_g y^j v_{lg} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)^2 \right] - 2(u_g - u_2) F_x y^j$$

Уравнение 5.98, интегрирано в граници от 0 до y_g , респ. от 0 до ∞ , води до изрази

$$5.99. \quad \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \left[\rho_g u_g (u_g - u_2)^2 \right] y^j dy + \int_0^\infty 2(u_g - u_2) \frac{\partial}{\partial x} (p y^j) dy = -2 \int_0^\infty \rho_g v_{lg} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)^2 y^j dy -$$

$$-2 \int_0^\infty (u_g - u_2) F_x y^j dy$$

Уравнението описва кинетичната енергия на газовата фаза при завъртяна струя, изтичаща в еднородна спътна среда, която се движи със скорост u_2 . За свободна струя, като се положи $u_2 = 0$, се получава

$$5.100. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho_g u_g^3 y^j dy + 2 \int_0^{\infty} u_g \frac{\partial p}{\partial x} y^j dy = -2 \int_0^{\infty} \rho_g v_{tg} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)^2 y^j dy - 2 \int_0^{\infty} u_g F_x y^j dy$$

Полученото уравнение за кинетичната енергия се различава от интегралните (съотношения) условия на П.С. Лейбензон [21] с двата допълнителни члена, които описват енергията от натискови сили и от силите на междофазово взаимодействие.

За незавъртени двуфазни струи уравн. 5.105 и 5.106 приемат вида:

$$5.101. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} [\rho_g u_g (u_g^2 - u_2^2)] y^j dy = - \int_0^{\infty} \rho_g v_{tg} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)^2 y^j dy - \int_0^{\infty} (u_g - u_2) F_x y^j dy$$

$$5.102. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho_g u_g^2 y^j dy = - \int_0^{\infty} \rho_g v_{tg} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \right)^2 y^j dy - 2 \int_0^{\infty} u_g F_x y^j dy$$

Ако в горните уравнения се положи $F_x = 0$, се получават интегралните условия за енергията на Лейбензон, валидни за еднофазни течения. Уравн. 5.99 и 5.100, без последния член, в който фигурират силите на междофазово взаимодействие, могат да се получат като частен случай на интегралните условия на Голубев [7] при стойност на степения показател $k = 1$.

По аналогичен начин може да се получи и *уравнението за кинетичната енергия на примесите*:

$$5.103. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} \rho_p u_p^3 y^j dy = -2 \int_0^{\infty} \rho_p v_p y^j \left(\frac{\partial u_p}{\partial y} \right)^2 dy + \int_0^{\infty} 2u_p F_x y^j dy$$

Като се използват уравненията за непрекъснатост, за примесите (5.52) и за концентрацията (5.59), се получава едно *допълнително интегрално условие от по-висок ред*. Умножава се първото по χ^2 , второто по 2χ и след почленното им сумиране се получава

$$\frac{\partial}{\partial x} (u_p \chi^2 y^j) + \frac{\partial}{\partial y} (v_p \chi^2 y^j) = 2 \left[\frac{\partial}{\partial y} (\chi y^j) \frac{v_p}{Sc_t} \frac{\partial \chi}{\partial y} \right] - y^j \frac{v_p}{Sc_t} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} \right)^2$$

Интегрирането по y в граници от 0 до $y_p(\infty)$ води до израза

$$5.104. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} u_p \chi^2 y^j dy = - \int_0^{\infty} y^j \frac{v_p}{Sc} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} \right)^2 dy$$

Полученото допълнително интегрално условие спада към тези от по-висок ред, за каквито се упоменава в [3, 7]. То няма собствена физическа интерпретация, но това ни най-малко не намалява възможностите да се използва при решаване на задачи по интегралния метод. Аналогични уравнения за еднофазни течения могат да се получат и от интегралните условия на Голубев при стойности на $k > 1$. За яснота може да се каже, че при $k = 0$ се получава уравнението за количество на движение.

При неизотермични струи към интегралните условия, дадени по-горе, трябва да се добавят *условията за запазване топлосъдържанието на фазите и уравнението за състоянието на газа* (уравн. на Клапейрон) [42]:

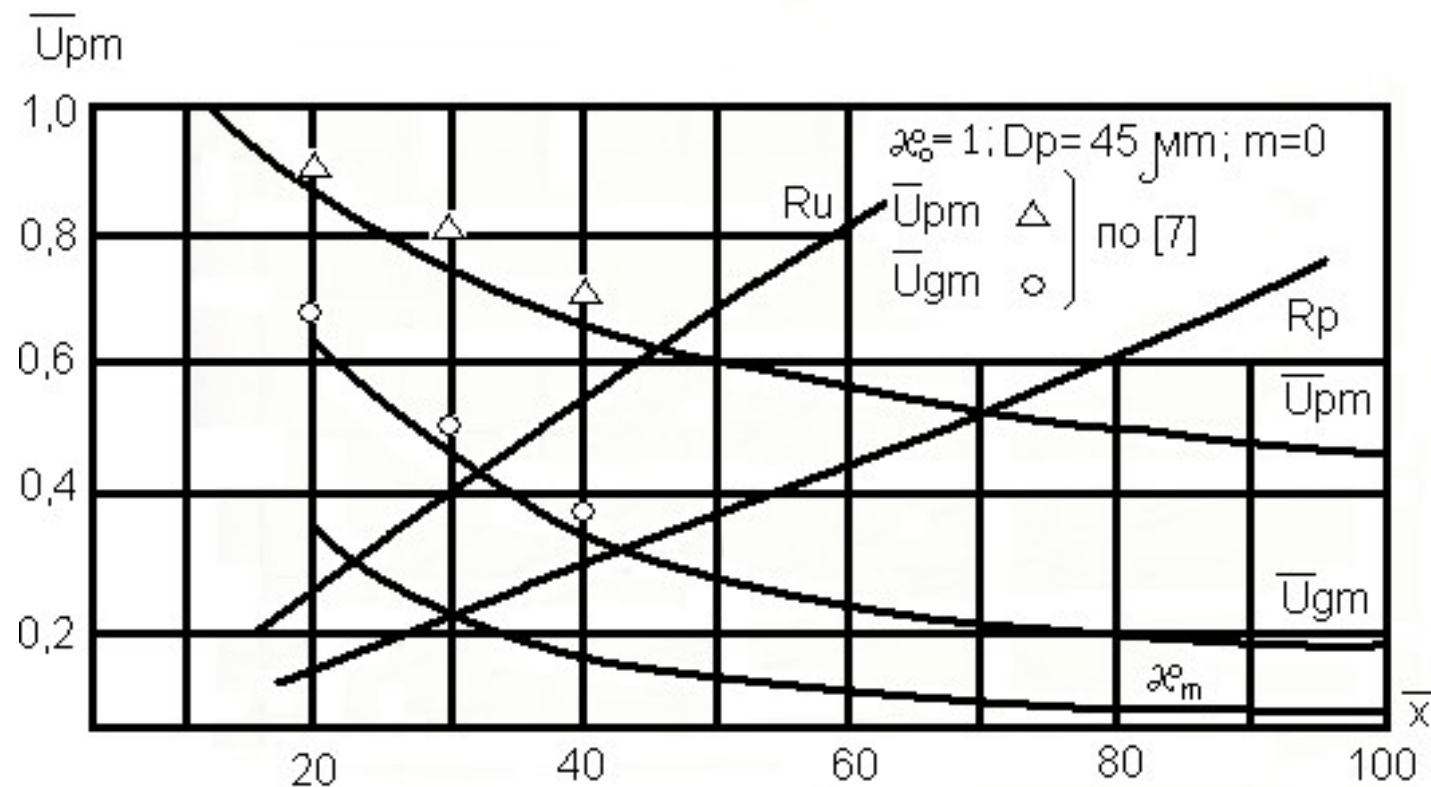
$$5.105. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} c_{pg} \rho_g U_g (T_g - T_2) y^j dy = \int_0^{\infty} F_x (U_g - U_p) y^j dy - \int_0^{\infty} Q \cdot y^j dy$$

$$5.106. \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} c_{pp} \rho_p U_p T_p y^j dy = \int_0^{\infty} Q \cdot y^j dy$$

$$5.107. p = \rho_g R T_g$$

Специфичните топлинни капацитети при постоянно налягане C_{pp} и C_{pg} са функция на температурата на фазите. Топлинното взаимодействие между фазите съгласно [10, 42] се определя по израза $Q = 6Nu\lambda.D_p^{-2}(T_g - T_p)$, където числото на Нуселт се приема функция от вида $Nu = 2 + CRe^n Pr_t^m$, C , n и m са емпирични константи, зависещи от Re . Коефициентът на топлопроводност зависи от температурата: $\lambda = \lambda_o(1 + \beta.T)$, λ_o е коефициент на топлопроводност при $0^\circ C$, β - постоянна за всяко вещество.

Решението на получените интегрални условия при използване на съответните безразмерни зависимости за напречното разпределение на скоростта, налягането и концентрацията се решават числено. Подобни числени решения са представени в [6, 42 - 44]. На фиг.5.5 е дадено сравнение на числените резултати по [6] с опитни данни по [4, 8] при следните параметри на изтичащата струя: $\chi=1$, $D_p=45 \mu m$, $u_2=0$, $S=0$. Очевидно е доброто съвпадение на числения резултат с експерименталните данни.



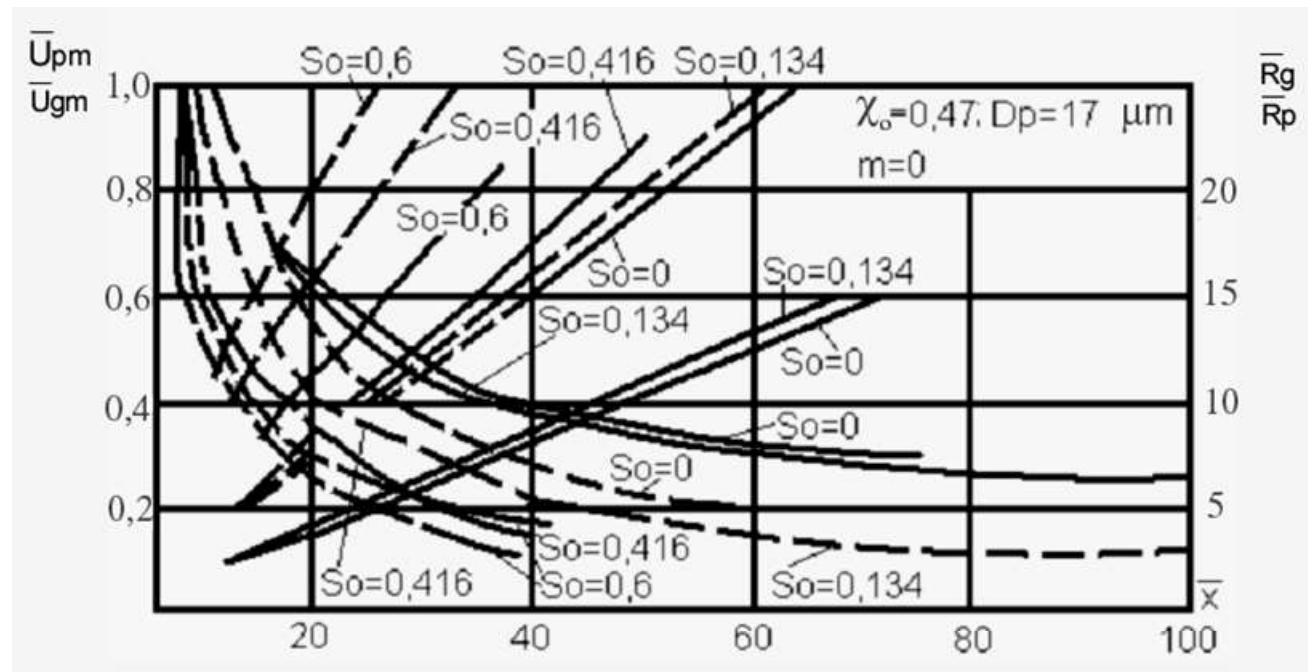
Фиг.5.5

На фиг. 5.6 а и б са дадени резултати от числено изследване по описания по-горе интегрален метод за завъртяна двуфазна турбулентна струя по [6]. Поради липса на опитни данни не е направено сравнение. От фигурите е очевидно влиянието на степента на въртене S_0 върху параметрите на струята.

Във фиг. 5.5 и 5.6 се дадени следните безизмерни параметри:

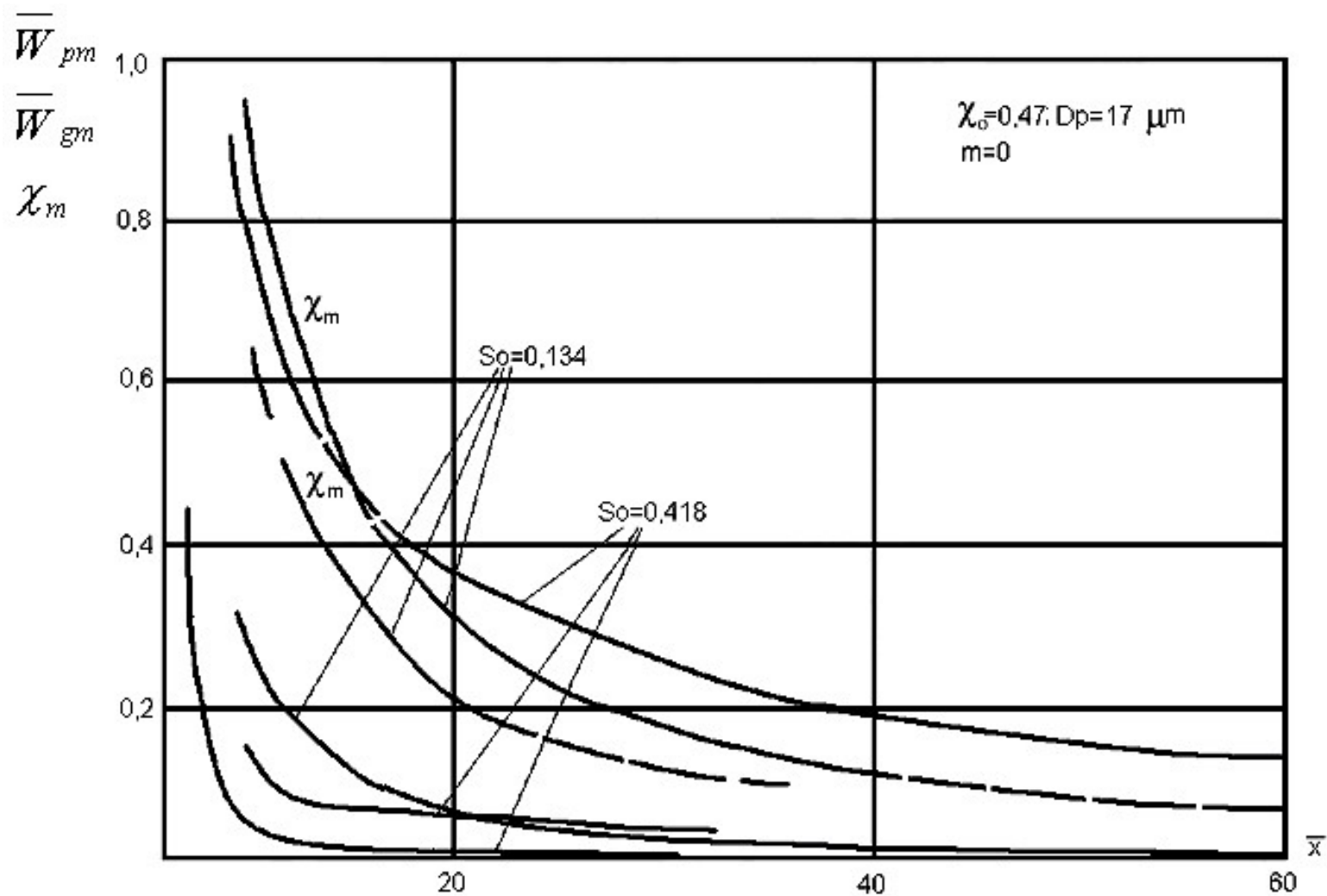
<http://mfantonov.com/>

$$\bar{W}_{pm} = \frac{W_{pm}}{W_{po}}; \bar{W}_{gm} = \frac{W_{gm}}{W_{go}}; \bar{U}_{gm} = \frac{U_{gm}}{U_{go}}; \bar{U}_{pm} = \frac{U_{pm}}{U_{po}}; \bar{R}_g = \frac{R_g}{R_{go}}; \bar{R}_p = \frac{R_p}{R_{po}};$$



Плътните линии се отнасят до параметрите на фазата на примесите.

фиг. 5.6а



фиг.5.6 б