



**ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ**

# ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

**проф. д-р ИВАН. АНТОНОВ**

<http://mfantonov.com>

# ЛИТЕРАТУРА:



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

*ИВАН. С. АНТОНОВ*

**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА  
НА ФЛУИДИТЕ**

*ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО  
И ДОПЪЛНЕНО ИЗДАНИЕ*

СОФИЯ  
2016

## 5) УРАВНЕНИЯ НА РЕЙНОЛДС ЗА ОСРЕДНЕНОТО ТУРБУЛЕНТНО ТЕЧЕНИЕ

### Уравнения на Рейнолдс за осредненото турбулентно течение

При извода на Рейнолдс като изходни се използват известните уравнения на Навие-Стокс. В декартова координатна система тези уравнения имат вида:

$$3.17 \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$3.18 \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$3.19 \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right).$$

Към посочената по-горе система се добавя и уравнението на непрекъснатост

$$3.20 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

При извода на новата форма на уравненията за движение на турбулентен флуид се използва само първото уравнение от системата (3.17 ÷ 3.19). Изводът на останалите две уравнения е аналогичен.

Уравнението за непрекъснатостта се умножава по  $u$  и се прибавя към дясната страна на уравнение (3.17), от което се получава:

$$3.21 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Групирането на членовете в горния израз позволява да се получи следният вид на уравнението:

$$3.22 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

При развито турбулентно течение се прилага предложението от Рейнолдс [18] подход, представяйки моментните стойности на скоростните компоненти като сума от осреднените по време и техните пулсационни съставлящи:

$$(3.23) \quad u = \bar{u} + u'; v = \bar{v} + v'; w = \bar{w} + w'$$

Прави се следното предположение: приема се, че при развито квазистационарно турбулентно течение:

- средните стойности на скоростните компоненти и на останалите параметри на течението слабо зависят от метода на осреднение съгласно описания по-горе постулат;
- пулсациите са величини от по-нисък порядък в сравнение с осреднените параметри.

На основата на първото приемане, следва че при всяко следващо осредняване по време на съответния параметър съгласно [6] няма да се промени първоначалната му стойност, т.е.:

$$3.24 \quad \bar{\bar{u}} = \bar{u}; \bar{\bar{v}} = \bar{v}; \bar{\bar{w}} = \bar{w}$$

Следствие на така приетото по (3.8), за осреднената стойност на пулсационните съставлящи се получава:

$$3.25 \quad \overline{u'} = \overline{u} - \overline{\overline{u}}; \quad \overline{v'} = \overline{v} - \overline{\overline{v}}; \quad \overline{w'} = \overline{w} - \overline{\overline{w}};$$

От (3.25) следва заключението, че осреднената стойност на пулсационната съставляща е равна на нула.

Съгласно казаното по-горе, като се изхожда от квазистационарността на течението, се прави приемането

$$3.26 \quad \overline{\overline{u'}} = \overline{\overline{u}}'$$

Съгласно приетия постулат следва равенство на нула на горното уравнение, тъй като  $\overline{u'} = 0$ ;  $\overline{\overline{u}} = \overline{u}$ ;  $\overline{\overline{u'}} = 0$ .

Като се използва (3.23), за членовете на уравн. (3.22) следва:

$$\overline{u^2} = \overline{(\overline{u} + u')^2} = \overline{u^2} + 2\overline{\overline{u}u'} + \overline{u'^2}$$

$$3.27 \quad \overline{uv} = \overline{(\overline{u} + u')(\overline{v} + v')} = \overline{\overline{u}v} + \overline{\overline{u}v'} + \overline{\overline{u}'v} + \overline{u'v'}$$

$$\overline{uw} = \overline{(\overline{u} + u')(\overline{w} + w')} = \overline{\overline{u}w} + \overline{\overline{u}w'} + \overline{\overline{u}'w} + \overline{u'w'}$$

Ако се приеме, че постулатът (3.3) не е в сила за едно произволно с анизотропна турбулентност течение, следва, че произведението на осреднените параметри на пулсационните съставлящи няма да бъдат равни на нула т.е.

$$3.28 \quad \overline{\overline{u'}} \neq 0; \quad \overline{\overline{v'}} \neq 0; \quad \overline{\overline{w'}} \neq 0 \text{ и т.н.}$$

След заместване стойностите на  $\overline{u^2}$ ,  $\overline{uv}$  и  $\overline{uw}$  в предварително осреднено по време уравн. 3.6 се получава:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \\
 3.29 \quad & \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right) - \\
 & - \left[ \frac{\partial \left( 2\overline{uw'} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( \overline{uv'} + \overline{vu'} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \overline{uw'} + \overline{wu'} \right)}{\partial z} \right]
 \end{aligned}$$

По аналогичен начин се преработват уравн. (3.18) и (3.19), които приемат вида:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \bar{Y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \\
 3.30 \quad & \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right) - \\
 & - \left[ \frac{\partial \left( \overline{uv'} + \overline{vu'} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( 2\overline{vv'} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left( \overline{vw'} + \overline{wv'} \right)}{\partial z} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \bar{Z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \\
 3.31 & \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z} \right) - \\
 & - \left[ \frac{\partial (\bar{u}w' + \bar{w}u')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{v}w' + \bar{w}v')}{\partial y} + \frac{\partial (2\bar{w}w')}{\partial z} \right]
 \end{aligned}$$

В дясната страна на уравн. 3.28÷3.31 за разлика от уравненията на Навие – Стокс, има два нови тензора:

- Тензор на рейнолдсовите напрежения  $T$ :

$$3.32 \quad T = - \left\{ \begin{array}{l} \overline{\rho u'^2}; \overline{\rho u'v'}; \overline{\rho u'w'} \\ \overline{\rho u'v'}; \overline{\rho v'^2}; \overline{\rho v'w'} \\ \overline{\rho u'w'}; \overline{\rho v'w'}; \overline{\rho w'^2} \end{array} \right\}$$

Тензорът е симетричен относно диагонала, който съдържа нормалните турбулентни напрежения:

$$3.33 \quad -\overline{\rho u'^2}; -\overline{\rho v'^2}; -\overline{\rho w'^2}$$

Останалите членове са трите турбулентни тангенциални напрежения:

$$3.34 \quad -\overline{\rho u'v'}; -\overline{\rho u'w'}; -\overline{\rho v'w'}$$

- Тензорът на напрежение на Леонард [17]

$$3.35 \quad L = - \begin{Bmatrix} 2\rho\overline{u'u'}; \rho(\overline{uv'} + \overline{vu'})'; \rho(\overline{uw'} + \overline{wu'}) \\ \rho(\overline{uv'} + \overline{vu'})'; 2\rho\overline{v'v'}; \rho(\overline{vw'} + \overline{wv'}) \\ \rho(\overline{uw'} + \overline{wu'})'; \rho(\overline{vw'} + \overline{wv'})'; 2\rho\overline{w'w'} \end{Bmatrix}$$

По аналогия с тензора на рейнолдовите напрежения и тук може да се приеме симетрия по диагонала, като членовете по него условно могат да се нарекат нормални:

$$3.36 \quad -2\rho\overline{u'u'}; -2\rho\overline{v'v'}; -2\rho\overline{w'w'}$$

Симетрично на диагонала са разположени тангенциалните напрежения и могат с определени уговорки да се приемат равни на нула. При анизотропна турбулентност, каквато е най-често срещаната в природата и инженерната практика е в сила зависимостта

$$3.37 \quad u' \neq v' \neq w'$$

Тангенциалните напрежения на Леонард са винаги отлични от нула.

Получената система частни диференциални уравнения (3.29÷3.32) описва с по-голяма общност турбулентното движение на флуида. В тази система фигурират обаче допълнителни шест или девет напрежения. Това усложнява значително решението на задачата и създава трудности относно тяхното моделиране.

Остава открит въпросът: накъде с описанието и моделирането на турбулентните течения? Трудно е да се даде еднозначен отговор. Това налага следния извод:

Необходимо е създаване на още по-сложни модели на турбулентност. В случая не бива да се забравя, че както изведените тук уравнения, така и тези на Рейнолдс са модели на течението при определени приемания. Впоследствие се прави повторно моделиране на съответните турбулентни напрежения.

Ако се приеме тензорът на Леонард идентичен с нула, съгл. уравн. 3.28÷3.31 се получава обичайният вид на рейнолдсовите уравнения:

$$3.38 \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \bar{X} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right)$$

$$3.39 \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \bar{Y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right)$$

$$3.40 \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \bar{Z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - \left( \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right),$$

към които се добавя уравнението за непрекъснатост

$$3.41 \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

В системата (38÷41) фигурират четири осреднени параметъра на течението,  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$  трите нормални напрежения  $(-\rho \overline{u'^2}, -\rho \overline{v'^2}, -\rho \overline{w'^2})$  и трите тангенциални напрежения  $(-\rho \overline{u'v'}, -\rho \overline{u'w'}, -\rho \overline{v'w'})$ . Определянето на тези турбулентни напрежения става по съответните модели на турбулентност, описани в тази книга.

## Втори вид уравнения за движение на турбулентен флуид

Уравненията на Рейнолдс за движение на турбулентно течение се правят на основата на хипотезата за равенство на моментната скорост на сбора от осреднената по време и пулсационната и съставлява според (3.1). Получава се един модел на турбулентно течение, при който се налага следващо моделиране на турбулентните напрежения.

Съвременните програмни продукти (Ansys, Fluent) [14] са изградени върху описания по-долу подход. Основен недостатък при описанието им е, че използват неправилно термина „рейнолдсови уравнения“, което заблуждава читателя.

В този раздел се прави изводът на уравненията в упоменатия програмен продукт в точен вид. Показана е възможността за определяне на тримерния спектър на турбулентните напрежения, а оттам и цялостната картина на течението в тримерна постановка.

Диференциални уравнения за турбулентно течение, изведени на основата на уравнението на динамиката на флуидите в напрежения [1,6].

При извода на уравненията за движение на турбулентен флуид се изхожда от уравненията на динамиката на флуиди в напрежения, като при тях се прилага хипотезата на Бусинекс относно ефективния вискозитет.

Уравненията на динамиката на флуидите в напрежения в скаларен вид са следните:

$$3.55 \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$3.56 \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$3.57 \quad \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z},$$

където  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  са нормалните напрежения, а  $\tau_{ij}$  - тангенциалните.

Съгласно обобщения закон на Нютон -  $P = aS + b$ , където  $P$  и  $S$  са тензорите на вътрешни напрежения и на деформационните скорости,  $a = 2\mu$  и  $b$  са тензорни константи. Тогава за тангенциалните напрежения се получава:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu_{ef} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$3.58 \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu_{ef} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu_{ef} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

За нормалните напрежения при несвиваем флуид следва:

$$\sigma_x = -p + 2\mu_{ef} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$3.59 \quad \sigma_y = -p + 2\mu_{ef} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_z = -p + 2\mu_{ef} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Съгласно хипотезата на Бусинекс сумарното тангенциално напрежение може да се определи като сума от вискозните и тангенциалните напрежения. На тази база се приема, че

$$3.60 \quad \tau_{eff} = \tau + \tau_T$$

От където за ефективния вискозитет  $\mu_{eff}$  се приема израза

$$3.61 \quad \mu_{eff} = \mu + \mu_T$$

Относно (3.61) е необходимо да се подчертае, че за разлика от динамичния коефициент на вискозитета  $\mu$ ,  $\mu_T$  не е константа и не е свойство на флуида, а качеството на течението, зависещо от степента му на турбулентност. Приетият израз позволява да се направи изводът на уравненията за движение на турбулентния флуид.

Заместват се (3.58, 3.59, 3.61) в уравн. 3.55-3.57, от което следва:

$$3.62 \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial u}{\partial x} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$3.63 \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] +$$

$$+ 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$3.64 \quad \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\mu + \mu_T) \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\mu + \mu_T) \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

След преработка на горните уравнения при приетото условие за несвиваем флуид се получава:

$$3.65 \quad \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_T \frac{\partial u}{\partial x} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

$$3.66 \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_T \frac{\partial v}{\partial y} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_T \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

$$3.67 \quad \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_T \frac{\partial w}{\partial z} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_T \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

Към тези уравнения се прибавя и уравнението за непрекъснатост:

$$3.68 \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

В получените уравнения (3.11)÷(3.13) в дясната им страна се съдържат привидните турбулентни нормални и тангенциални напрежения:

$$3.69 \quad \sigma'_x = \mu_T \frac{\partial u}{\partial x} = \mu_T e_x$$

$$3.70 \quad \sigma'_y = \mu_T \frac{\partial v}{\partial y} = \mu_T e_y$$

$$3.71 \quad \sigma'_z = \mu_T \frac{\partial w}{\partial z} = \mu_T e_z$$

$$3.72 \quad \tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu_T e_{xy}$$

$$3.73 \quad \tau'_{xz} = \tau'_{zx} = \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \mu_T e_{xz}$$

$$3.74 \quad \tau'_{yz} = \tau'_{zy} = \mu_T \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu_T e_{yz}$$

Турбулентния динамичен вискозитет е величина, която зависи от координатите  $x, y, z$  и тя не може да се приеме еквивалентна на коефициента на динамичния вискозитет. От друга страна, турбулентните напрежения зависят от градиента на скоростните компоненти във всяка една точка на течението. Така получените стойности за  $\sigma'$  и  $\tau'$ , може да се приеме, че отразява тримерността на течението чрез влиянието върху тях на градиентите на скоростните компоненти, респ. съставлящите на тензора на деформационите скорости:

$$3.75 \quad S = \begin{pmatrix} e_x, e_{yx}, e_{zx} \\ e_{xy}, e_y, e_{zy} \\ e_{xz}, e_{yz}, e_z \end{pmatrix}$$

Една подобна идея е заложена в програмните продукти Ansys и Fluent [14].

Тъй като при едно числено пресмятане на задачата е възможно определяне на разпределението на скоростните компоненти  $u, v$  и  $w$ , респ  $\mu_t$ , не представлява трудност определянето и на  $\sigma'$  и  $\tau'_{ij}$ .

#### *Тензор на турбулентните напрежения*

На основата на направеното дотук може да се запише тензорът на турбулентните напрежения

$$3.76 \quad \begin{vmatrix} \sigma'_x, \tau'_{yx}, \tau'_{zx} \\ \tau'_{xy}, \sigma'_y, \tau'_{zy} \\ \tau'_{xz}, \tau'_{yz}, \sigma'_z \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \overline{\rho u'^2}, \overline{\rho u'v'}, \overline{\rho u'w'} \\ \overline{\rho u'v'}, \overline{\rho v'^2}, \overline{\rho v'w'} \\ \overline{\rho u'w'}, \overline{\rho w'v'}, \overline{\rho w'^2} \end{vmatrix}$$

Или като се имат предвид равенствата (3.69 ÷ 3.74), лявата част на (3.76) се замества, както следва:

$$3.77 \left| \begin{array}{l} \mu_T \frac{\partial u}{\partial x}, \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \mu_T \frac{\partial v}{\partial y}, \mu_T \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu_T \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \mu_T \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \mu_T \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{l} \overline{\rho u'^2}, \overline{\rho u'v'}, \overline{\rho u'w'} \\ \overline{\rho u'v'}, \overline{\rho v'^2}, \overline{\rho v'w'} \\ \overline{\rho u'w'}, \overline{\rho w'v'}, \overline{\rho w'^2} \end{array} \right|$$

По този начин е очевидно определянето на рейнолдсовите напрежения със съответните им стойности в лявата страна на равенството в (3.23). Това позволява пресмятането на пълната картина на турбулентното течение – цялата гама от нормални и тангенциални турбулентни напрежения. При това може да се смята, че турбулентността е определена в тримерен вид.

При определянето на  $\mu_T$  могат да се използват широка гама съвременни модели на турбулентност.

С получаването на  $\mu_T$  се намира пълният спектър на турбулентността в тримерна постановка.

Подходът за решаване може да бъде следният: с използване на упоменатите по-горе програмни продукти се пресмята динамичният турбулентен вискозитет. По нататък е необходимо да се направи една не толкова трудна процедура на определяне на съставлящите на тензора (3.77). Разбира се, в интерес на истината се допуска известна неточност, че първоначално  $\mu_T$  се определя в двумерна постановка, но това се компенсира със следващото разглеждане. То може да се приеме като едно второ, по-точно приближение на задачата.

Описаният метод на записване на уравненията на движение на турбулентния флуид позволява моделиране на тримерния спектър на турбулентност и решаване на практически задачи от механика на флуидите, топлотехника и др.

*Уравненията за турбулентното движение в цилиндрични координатни система.*

Тези уравнения се получават по аналогичен начин като при изведените по-горе уравнения в декартова координатна система. Видът им в координатна система  $(x, r, \theta)$  е следният:

$$3.78. \quad \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) -$$

$$- \nu_r \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right)$$

$$3.79 \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) -$$

$$- \nu_r \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

$$3.80 \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{vw}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left( \nabla^2 w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) -$$

$$- \nu_r \left( \nabla^2 w - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right),$$

където лапласовият оператор  $\nabla^2$  е равен на:

$$3.81 \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

**Заклучение:** Изложените тук уравнения засега са основните и най-често използваните при решаване на турбулентни течения. На тяхна база са изградени използваните в инженерната практика съвременни софтуерни продукти. Разбира се при решаване на турбулентни течения се използват и други методи (метод на директното решаване на уравненията за движение на крупните вихри и др.). Всички тези методи са много добре формулирани и обосновани физически още през 50-те и 60-те години на миналия век [8]. Развитието на съвременната изчислителна техника ги връща към „нов живот“ и по-широко приложение.

### Основни уравнения при двуфазни неизотермични турбулентни струи

Разпространението на двуфазни неизотермични турбулентни струи се описва с уравненията за непрекъснатост на Рейнолдс за топлобмена приложен за всяка една от фазите. Към тях се добавя уравнението за концентрацията на примеси и уравнението за състоянието на Клайпейрон, приложено за носещата среда. Тези уравнения са описани подробно в глава първа, както и неизотермичната основа на двуфлуидната схема на течението. Още веднъж трябва да се подчертае следното:

- връзката между двете системи ( за всяка фаза) са силите на междофазово взаимодействие;
- уравненията се отнасят за ососиметрични ( $j=1$ ) и за плоски струи ( $j=0$ )

Видът на уравненията в двумерна постановка е следният:

$$3.82. \quad \frac{\partial}{\partial x} [y^j U_g \rho_g] + \frac{\partial}{\partial y} [y^j V_g \rho_g] = 0$$

$$3.83 \quad \frac{\partial}{\partial x} [y^j U_p \rho_p] + \frac{\partial}{\partial y} [y^j V_p \rho_p] = 0$$

$$3.84 \quad [y^j U_p] \frac{\partial \rho_p}{\partial x} + y^j V_p \frac{\partial \rho_p}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} [y^j \rho' V'] - \overline{\rho'_p V'_p}$$

$$3.85 \quad [y^j \rho_g U_g] \frac{\partial U_g}{\partial x} + [y^j \rho_g V_g] \frac{\partial U_g}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} [y^j \rho_g \overline{U'_g V'_g}] - F_x y^j$$

$$3.86 \quad [y^j \rho_p U_p] \frac{\partial U_p}{\partial x} + [y^j (\rho_p V_p + \overline{\rho'_p V'_p})] \frac{\partial U_p}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} [y^j \rho_p \overline{U'_p V'_p}] - F_x y^j$$

$$3.87 \quad [y^j \rho_g U_g] \frac{\partial h_g}{\partial x} + [y^j \rho_g V_g] \frac{\partial h_g}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} [y^j \rho_g \overline{h'_g V'_g}] - \\ - [y^j \rho_g \overline{h'_g V'_g}] \frac{\partial U_g}{\partial y} - Q y^j + F_x y^j (U_g - U_p) + F_y y^j (V_g - V_p) - \sum_{i=1}^3 \overline{F_i V'_{pi}}$$

$$3.88 \quad [y^j \rho_p U_p] \frac{\partial h_p}{\partial x} + [y^j (\rho_p V_p + \overline{\rho'_p V'_p})] \frac{\partial h_p}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} [y^j \rho_p \overline{h'_p V'_p}] + Q y^j$$

$$3.89 \quad P = \kappa R T_g$$

В уравнения 3.82÷3.89 се заместват  $h_p$  и  $h_g$  с техните равни съгласно (3.90). Пренебрегва се членът  $\rho \overline{V'_p}$  в дясната страна на уравн. 3.84. В случая, когато се отчита подезната (Архимедовата) сила, в уравн. 3.85 се добавя членът  $\rho_2 \pi^j y^{2j} g$ . След тази преработка системата уравнения приема вида:

$$3.90. \quad \frac{\partial}{\partial x} [y^j U_g \rho_g] + \frac{\partial}{\partial y} [y^j V_g \rho_g] = 0$$

$$3.91. \quad \frac{\partial}{\partial x} [y^j U_p \rho_p] + \frac{\partial}{\partial y} [y^j V_p \rho_p] = 0$$

$$3.92. \quad [y^j U_p] \frac{\partial \kappa}{\partial x} + [y^j V_p] \frac{\partial \kappa}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \frac{v_{tp}}{Sc_t} \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right)$$

$$3.93 \quad [y^j \rho_g U_g] \frac{\partial U_g}{\partial x} + [y^j \rho_g V_g] \frac{\partial U_g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \rho_g v_{tg} \frac{\partial U_g}{\partial y} \right) - F_x y^j - \rho_2 \pi^j y^{2j} g$$

$$3.94 \quad (y^j \rho_p U_p) \frac{\partial U_p}{\partial x} + (y^j \rho_p V_p) \frac{\partial U_p}{\partial y} = \left( y^j \rho_g \frac{v_{tp}}{Sc_t} \frac{\partial x}{\partial y} \right) \frac{\partial U_p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \rho_p v_{tp} \frac{\partial U_p}{\partial y} \right) + F_x y^j$$

$$3.95 \quad (y^j \rho_g U_g c_{pg}) \frac{\partial T_g}{\partial x} + (y^j \rho_g V_g c_{pg}) \frac{\partial T_g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \rho_g c_{pg} \frac{v_{tg}}{Pr_t} \frac{\partial T_g}{\partial y} \right) + Q y^j + F_x y^j (U_g - U_p)$$

$$3.96 \left( y^j \rho_p U_p c_{pp} \right) \frac{\partial T_p}{\partial x} + \left( y^j \rho_p V_p c_{pp} \right) \frac{\partial T_p}{\partial y} = \left( y^j \rho_p c_{pp} \frac{v_p}{Sc_t} \frac{\partial x}{\partial y} \right) \frac{\partial T_p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left( y^j \rho_p c_{pp} \frac{v_p}{Pr_t} \frac{\partial T_p}{\partial y} \right) + Q y^j$$

$$3.100 \quad P = \kappa R T_g$$