



**ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ**

# ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА НА ФЛУИДИТЕ

**проф. д-р ИВАН. АНТОНОВ**

<http://mfantonov.com>

# ЛИТЕРАТУРА:



ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – СОФИЯ

*ИВАН. С. АНТОНОВ*

**ПРИЛОЖНА МЕХАНИКА  
НА ФЛУИДИТЕ**

*ВТОРО ПРЕРАБОТЕНО  
И ДОПЪЛНЕНО ИЗДАНИЕ*

СОФИЯ  
2016

#### 4) ЛАГРАНЖЕВИ УРАВНЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕ. ОЙЛЕРОВИ УРАВНЕНИЯ ЗА ДВИЖЕНИЕ НА НЕЕДНОРОДНИ СРЕДИ

##### Лагранжеви уравнения за движение

При движението на единична частица (капка) в двуфазно течение моделирането му се прави по метода на Лагранж. Общото лагранжево уравнение за постъпателно движение на единична частица има вида

$$1.30 \quad m_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i,$$

където  $\sum_{i=1}^n \vec{f}_i = \vec{f}_g + \vec{f}_A + \vec{f}_\Pi + \vec{f}_r + \vec{f}_B + \vec{f}_M + \vec{f}_S + \vec{f}_{m\mu} + \vec{f}_m + \vec{f}_E + \vec{f}_\Phi + \dots$  -представява сумата от силите на междуфазово взаимодействие, към които е прибавена и силата от собствено тегло.

Както бе изтъкнато в предишното разглеждане, възможни са случаи, при които частицата примеси може да придобие въртливо движение. За описване на динамичното взаимодействие между фазите е необходимо да се въведе и използва при решенията допълнително уравнение за запазване момента на количество на движение за единична частица. Това уравнение за сферична единична частица, записано в лагранжеви координати, съгласно [33] има вида

$$1.31 \quad \vec{I}_p \frac{d\vec{\omega}_p}{dt} = -\pi \rho_{go} V D_p^2 \left( \vec{\omega}_p - \vec{\omega}_g \right),$$

където:  $\vec{\omega}_g = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V}_g$  е ъгловата скорост на елемент от носещата (газова или течна) фаза,  $\vec{I}_p$  - инерционен момент на частицата, който може да се представи като  $I_p = 0,125 m_p D_p^2$  по [53].

### Ойлерови уравнения за движение на нееднородни среди

Разглежда се смес от  $n$  фази (или компоненти) при изпълнени условия относно непрекъснатостта ѝ като съвкупност от  $n$  континуума, запълващи един и същ обем [37]. За всеки от тези континууми се въвеждат собствена плътност и скорост. При това във всяка точка от пространството, запълнено от многофазната или многокомпонентната смес, ще има  $n$  плътности и  $n$  скорости, отнасящи се до съответния континуум.

Нека с  $N_i$  се означава броят на частиците (молекулите) в единица обем и съответно с  $m_i$  - тяхната маса, при това плътността на  $n$ -та фаза (компонента) [27] се определя като

$$1.32 \quad \rho_i = N_i m_i$$

От определението, че плътността е маса в единица обем, като се сумират плътностите на всички фази (компоненти) на сместа, следва

$$1.33 \quad \rho = \sum_{i=1}^n N_i m_i = \sum_{i=1}^n \rho_i$$

Отношението

$$1.34 \quad \frac{\rho_i}{\rho} = \frac{N_i m_i}{\sum_{i=1}^n N_i m_i} = c_i$$

представлява масовата концентрация на частици от  $i$ -тата фаза (компонента) на сместа. Сумата от масовите концентрации  $\sum_{i=1}^n c_i = 1$ .

Твърде често при анализ на двуфазните течения, особено при двуфазни турбулентни струи [1, 2, 4, 5], се използва и един друг запис на масовата концентрация, значително по-удобен при численото решаване на задачите.

$$1.35 \quad \chi = \frac{G_p}{G_g}$$

Между двете така формулирани масови концентрации съществува следната връзка:

$$1.36 \quad c = \frac{\chi}{1 + \chi}, \text{ респ. } \chi = \frac{c}{1 - c}$$

Тук се използват и двата изрази за масовата концентрация.

Между обемната концентрация  $\alpha$  и масовата  $\chi$  или  $c$  съществува следната връзка [4]:

$$1.37a \quad \alpha = \frac{\chi \rho_g}{\rho_p}, \quad \alpha = \frac{c \rho_g}{(1 - c) \rho_p},$$

или

$$1.37b \quad \chi = \frac{\alpha \rho_p}{\rho_g}, \quad c = \frac{\alpha \rho_p}{\rho_g + \alpha \rho_p}$$

Тъй като дадените тук решения се реализират преди всичко при използване на масовата концентрация ( $\chi$  или  $c$ ), би могло да се каже следното: Приложението на масовата концентрация придава по - голяма универсалност на числените решения, без да се конкретизират заеманите обеми от фазите. Обемната концентрация участва в неявен вид при отчитане силите на междуфазово взаимодействие, тъй като те се разглеждат за единица обем. В случаите, когато се решават задачи, свързани с реагиращи помежду си фази, с фазови превръщания и пр., за препоръчване е да се използва обемната концентрация.

Уравненията за непрекъснатост, движение и енергия се извеждат за най-общия случай на многофазна (многокомпонентна) смес при наличие на непрекъснато възникване или изчезване на маса на някоя фаза (компонента) с интензивност  $J$ ; Те имат вида:

**Уравнение за непрекъснатост.** Уравнението за непрекъснатост за  $i$ -тата фаза (компонента):

$$1.38 \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_i \vec{V}_i) = J_{ji},$$

или за установено течение:

$$1.39 \quad \operatorname{div}(\rho_i \vec{V}_i) = J_{ji}$$

Като се изрази плътността на  $i$ -тата фаза съгласно (1.31) и се замести в уравнението за непрекъснатост, се получава

$$1.40 \quad \frac{\partial(\rho c_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho c_i \vec{V}_i) = J_{ji}$$

Скоростта на  $i$ -тата фаза може да се определи с така наречената относителна средна скорост на разпространение  $\vec{V}_i^*$ :

$$1.41 \quad \vec{V}_i = \vec{V} + \vec{V}_i^*,$$

където  $\vec{V}$  е средната скорост на сместа в дадена точка,  $\vec{V}_i^*$  - осреднена скорост на дифузия на  $i$ -тата фаза (компонента).

Замества се  $\vec{V}_i$  по (1.41) в уравн. 1.40, от което следва

$$1.42 \quad \rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \vec{V} \operatorname{grad} c_i = J_{ji} - \operatorname{div}(\rho c_i \vec{V}_i^*)$$

Полученото уравнение се нарича уравнение на концентрацията за дадена фаза или компонента от сместа. Лявата му страна представлява сума от локалното и конвективното изменение на концентрацията. В дясната страна се съдържат два члена: първият характеризира възникването на  $i$ -тата фаза (компонента) въз основа на определени

химически или физически процеси, вторият член описва дифузията на  $i$ -тата фаза в сместа [27]. Неизвестни в уравн. 1.42 са средната скорост на сместа  $\vec{V}$ , дифузионната  $\vec{V}_i^*$ ,  $J$  и концентрацията на примеси  $c_i$ . Л. Г. Лойцянский [27] препоръчва да се търси т. нар. дифузионно приближение на скоростта на сместа, определено за еднородна среда със стойности на физическите константи, съответстващи на тези на сместа. Това означава отхвърляне от точното уравнение на нелинейния член, характеризиращ сумарния ефект от дифузионното движение на фазите. Съгласно [27] това е допустимо при сравнително малки скорости на дифузия.

**Уравнение на динамиката на флуидите в напрежения.** За  $i$ -тата фаза (компонента) уравнението на динамиката в напрежения има вида

$$1.42a \quad \rho_i \frac{d_i \vec{V}_i}{dt} = \rho_i \vec{F}_i + \text{Div } P_i + \sum_{j=1}^n \left[ \vec{F}_{ij} + J_{ji} \left( \vec{V}_{ij} - \vec{V}_i \right) \right],$$

където с  $F_{ij} = -F_{ji}$  са означени отнесените към единица обем сили на взаимодействие между фазите (компонентите). Субстанциалната производна  $\frac{d_i}{dt}$  е свързана с движението на  $i$ -тата частица и означава следната

операция:  $\frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left( \vec{V}_i \nabla \right).$

Необходимо е да се подчертае характерната особеност при многофазните (многокомпонентни) смеси - ускорението на отделните фази и на сместа не съвпадат. Това важно свойство намира и техническо приложение (пясъчно-струйни апарати).

**Уравнение за енергията.** Уравнението за енергията на  $i$ -тата фаза от сместа се записва с израза

$$1.43 \quad \rho_i \frac{dE_i}{dt} = \rho_i \vec{F}_i \vec{V}_i + \operatorname{div} \left( P_i \vec{V}_i \right) + \rho_i q_i + \sum_{j=1}^n \left[ J_{ji} (E_{ij} - E_i) + \vec{F}_{ij} \vec{V}_{rij} \right]$$

С  $E_{ij}$  се означава пълната енергия на сместа, вследствие на превръщането ѝ от една към друга фаза,  $\vec{V}_{rij}$  скорост на приплъзване (относителна скорост) между фазите. Членовете в дясната страна на (1.43) изразяват: първият – мощността на обемните сили, отнесени към единица обем и приложени към  $i$ -тата фаза, вторият – въздействието на повърхностните сили. Третият член отразява подаденото към  $i$ -тата фаза (отнесено за единица обем) количество топлина, а четвъртият - разликата между внесената енергия от външни източници и тази от енергообмен между фазите.

Необходимо е да се обърне внимание на една особеност на направените изводи. В механиката на флуидите [27, 37] особен интерес представляват т.нар. нееднородни среди, състоящи се от различни по физически или химически състав смеси - фази или компоненти. Тъй като и в двата случая на течения на нееднородни среди (хомогенни или хетерогенни) основните уравнения на динамиката не се различават, е направен и общ извод. Затова навсякъде в скоби се означава и терминът "компоненти".

На базата на направения общ извод на основните уравнения за движение на многофазни (многокомпонентни) среди може да се запишат тези за двуфазни течения: Разглежда се двуфазно течение без допълнителен приток на маса вследствие на химически или физически превръщания.

Означават се с индексите “ $p$ ” – параметрите на примесите (течни или твърди), и с “ $g$ ” – на носещата среда, която може да е газ (въздух) или течност. Основните уравнения имат вида [4]:

- уравнение за непрекъснатост за газовата (носещата) среда:

$$1.44 \quad \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_g \vec{V}_g) = 0$$

- уравнение за непрекъснатост за фазата на примесите:

$$1.45 \quad \frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_p \vec{V}_p) = 0$$

- уравнение в напрежения за газовата фаза:

$$1.46 \quad \rho_g \frac{d\vec{V}_g}{dt} = \operatorname{Div} P + \rho_g \vec{F} - \rho_g \vec{F}_{gp}$$

- уравнение в напрежение за фазата на примесите:

$$1.47 \quad \rho_p \frac{d\vec{V}_p}{dt} = \rho_p \vec{F} + \rho_p \vec{F}_{gp}$$

- уравнение за баланса на енергия за газовата (носещата) фаза (при адиабатен процес):

$$1.48 \quad \rho_g \frac{dE_g}{dt} = \operatorname{div}(P\vec{V}_g) + \rho_g q + \rho_g \vec{F}\vec{V}_g - \rho_g \vec{F}_{gp}\vec{V}_g,$$

където  $E_g = U_g + \frac{1}{2}V_g^2 = c_v T_g + \frac{1}{2}V_g^2$ ,  $q$ -отнесен към единица обем приток на топлина от примесите.

- уравнение за баланса на енергия на примесите:

$$1.49 \quad \rho_p \frac{dE_p}{dt} = \rho_p q + \rho_p \vec{F}\vec{V}_p + \rho_p \vec{F}_{gp}\vec{V}_p$$

при  $E_p = U_p + \frac{1}{2}V_p^2 = c_v T_p + \frac{1}{2}V_p^2$ ,  $c_v$  – специфичен топлинен капацитет на примесите.

При изотермично течение  $q = 0$ ,  $U_g = \text{const}$ ,  $U_p = \text{const}$ , от което за енергиите на фазите следва:  $E_g = \frac{1}{2}V_g^2$ ,  $E_p = \frac{1}{2}V_p^2$ , при което уравненията за баланса на енергията на носещата фаза и за примесите приемат вида:

$$1.50 \quad \rho_g \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} V_g^2 \right) = \text{div} (P \vec{V}_g) - \rho_g \vec{F} \vec{V}_g - \rho_p \vec{F}_{gp} \vec{V}_p$$

$$1.51 \quad \rho_p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} V_p^2 \right) = \rho_p \vec{F} \vec{V}_p + \rho_p \vec{F}_{gp} \vec{V}_p$$

Съществуването на силово взаимодействие между двете фази (силите на междофазово взаимодействие  $\mp \vec{F}$ ) и наличието на топлопренос между тях обуславя съществуването на разлика между скоростите на фазите  $\vec{V}_g \neq \vec{V}_p$ , а при неизотермични течения и на температурите  $T_g \neq T_p$ . Разликата на скоростите на фазите налага въвеждане на

относителна скорост между тях или скорост на приплъзване  $\vec{V}_r = \vec{V}_p - \vec{V}_g$  съответно при неизотермични течения и на относителна температура  $T_r = T_p - T_g$ .

При тези случаи на разглеждане на двуфазно течение, когато се приема разлика в скоростите на фазите, се говори за т.нар. двускоростен или двуфлуиден модел на течението, съответно схема на решение или изследване. Този модел е свързан с отчитане на силите на междофазово взаимодействие и с определяне във всяка една точка от течението на скоростите, респ. температурите на двете фази.

Един частен, граничен случай се получава, когато се приеме  $\vec{V}_r \rightarrow 0$  ( $T_r \rightarrow 0$ ) при условие, че силите  $\vec{F}$  (за неизотермични течения и  $q$ ) запазват крайни стойности. Това се изпълнява при условие [27], че масата на частиците  $m_p \rightarrow 0$ , броят им  $N$  клони към безкрайност, при което произведението им  $\rho_p = m_p N$  остава крайна величина. За този граничен случай следва равенство на скоростите и на температурите на фазите -  $\vec{V}_r = \vec{V}_p = \vec{V}_g$ , респ.  $T_r = T_p = T_g$ .

Въвежда се плътност на сместа:

$$1.52 \quad \rho_{cm} = \rho_g + \rho_p, \text{ респ. } \rho_{cm} = \rho_g (1 + \chi)$$

Като се съберат при приетото равенство на скоростите уравн. 1.44 и 1.45 и се изрази плътността съгласно (1.52), се получава следният вид на уравнението за непрекъснатост:

$$1.53 \quad \frac{\partial}{\partial t} [(1 + \chi) \rho_g] + (1 + \chi) \rho_g \operatorname{div} \vec{V} = 0.$$

По същия начин чрез почленно сумиране на левите и десните части на уравн.1.46 и 1.47 и изразяване плътностите по (1.52) се получава уравнението в напрежения за двуфазно течение при равенство на скоростите:

$$1.54 \quad (1 + \chi) \rho_g \frac{d\vec{V}}{dt} = \operatorname{div} P$$

С аналогична процедура може да се намери и уравнението на баланса на енергията при упоменатите условия от уравн. 1.85 и 1.86:

$$1.55 \quad (1 + \chi) \rho_g \frac{d}{dt} \left( C_v T + \frac{1}{2} V^2 \right) = \operatorname{div} (P \vec{V})$$

Уравнения (1.53-1.55) моделират един граничен случай на двуфазно течение - при прието равенство на скоростите на двете фази. Методите на изследване и решение, основаващи се на тези уравнения, са известни като едноскоростни (еднофлуидни) или като методи на "пасивните" примеси. При тях въздействието на примесите се изразява само чрез масовата концентрация  $\chi$ . Течението се разглежда като равновесно, еднофлуидно, с тази разлика, че в плътността се отразява наличието на втора фаза чрез поправката -  $(1 + \chi)$ .